Euclides

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

45e jaargang
1969/1970
no. 1
september 1969

Wolters-Noordhoff Groningen

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Ch. Krijnen - Drs. J. van Lint - Dr. D. N. van der Neut - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. A. J. Th. Maassen, Bosboomstraat 20, Arnhem.

Penningmeester: Drs. J. van Dormolen, Karel Doormanlaan 50, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 9,00 per jaar.

Adreswijzigingen, opgave van nieuwe leden aan de secretaris.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de penningmeester: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem(N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-32494.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan G. A. J. Boost, Parklaan 107A, Roosendaal (NB).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 10,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-29786.

Euclides

Tijdschrift voor de didactiek van de wiskunde

In 1924 nam P. WIJDENES het initiatief tot de uitgave van EUCLIDES, dat dus nu zijn vijfenveertigste jaargang begint. Het zal hem ongetwijfeld genoegen doen, dat het zo fris en jong voor de dag komt.
Toen de redactie aan de uitgever verzocht EUCLIDES een nieuw jasje aan te trekken, was dat niet alleen met het doel dit tijdschrift een meer eigentijds uiterlijk te geven. Het vernieuwde omslag moet ook een symbool zijn voor een verandering van de inhoud.
Al dikwijls werd er van verschillende zijden opgemerkt, dat EUCLIDES maar weinig waar maakte van de ondertitel op het omslag: Tijdschrift voor de didactiek van de wiskunde. Veel van de artikelen waren van vaktechnische aard, interessant, maar niet in de eerste plaats gericht op de didactiek. De redactie wil ernstig proberen daarin verandering te brengen. Er zijn twee feiten die deze verandering dringend noodzakelijk maken:
Tot voor kort konden we ons verbeelden dat we wel wisten wat en hoe we te onderwijzen hadden. Er was een traditionele leerstof die meestal gedoceerd werd op een traditionele manier. Voor de meesten van ons waren de problemen niet al te groot. De nieuwe leerplannen hebben daarin een grondige wijziging gebracht. Verzamelingen, relaties, vectoren, groepen, lichamen en andere structuren, welke van deze of andere moderne onderwerpen kunnen in het voortgezet of zelfs het basisonderwijs een plaats vinden? In welke volgorde? Op welke manier kunnen de leerlingen ermee experimenteren? Welke van de traditionele technieken moeten ze blijven beheersen? Deze en andere vragen moeten in EUCLIDES aan de orde komen.
Het tweede feit dat de verandering van EUCLIDES noodzakelijk maakt is de doorbreking van de grenzen tussen de verschillende soorten van onderwijs. De instelling van een brugklas voor het voortgezet onderwijs heeft een coördinatie tussen de verschillende soorten van voortgezet onderwijs met zich mee gebracht. Mavo-, havo- en vwo-leraren zullen althans in de brugklas moeten samenwerken en overleggen, maar ook de mogelijkheid dat in hogere leerjaren leerlingen moeten kunnen 'doorstromen' maakt een nauwer contact noodzakelijk. Het project 'WISKOBAS', waarover in dit tijdschrift regelmatig informatie zal verschijnen, beoogt wiskunde te introduceren in het basisonderwijs. De bestudering van de didactiek van het wiskundeonderwijs zal dus moeten plaatsvinden op het uitgestrekte terrein van kleuterschool tot (en met?) de universiteit.
Het spreekt vanzelf dat de redactie zijn doel slechts kan bereiken in samenwerking met de lezers. Vragen, suggesties, artikelen, lesverslagen, enz. zijn daarom niet alleen van harte welkom, ze zijn een noodzakelijke voorwaarde om van EUCLIDES een tijdschrift voor de didactiek van de wiskunde te kunnen maken.

Kr.

Voor de brugklassen?

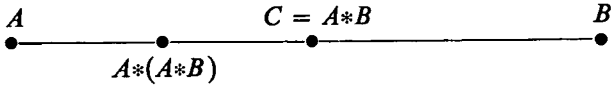
J. VAN LINT
Zwolle

Zoals op vele scholen is gebeurd, hebben ook wij met de taken en studielessen geëxperimenteerd. Pogingen om werkstukken te geven, die voor de determinatie geschikt zijn mislukken vaak om onbegrijpelijke redenen. Het lijkt mij zeer nuttig om kennis te nemen van elkaars geslaagde en mislukte pogingen en dus roep ik iedereen op om ideeën over opdrachten aan brugklassers of ervaringen hierover in deze rubriek te laten opnemen.
Om de lange rij stukjes van inzenders hier te openen geef ik een voorbeeld van een niet geheel geslaagde poging aan de Rijksscholengemeenschap in Zwolle. In de heroriënteringscursus in Groningen is hierover reeds gesproken en men heeft mij gevraagd dit idee in Euclides neer te schrijven.
Het slagen van de onderstaande taak is sterk afhankelijk van het moment waarop hij wordt gegeven en de inleiding, die erbij gegeven wordt.

Een vreemde algebra

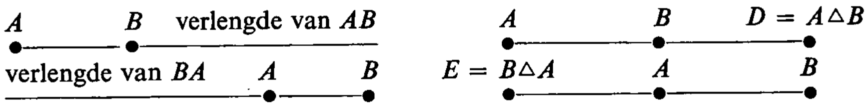
In de algebra les heb je in de verzameling **N** de twee bewerkingen optellen en vermenigvuldigen geleerd. Door deze bewerkingen wordt aan 2 getallen een derde getal toegevoegd. Bijvoorbeeld $3+5 = 8$; dus aan 3 en 5 wordt 8 toegevoegd door de bewerking $+$.
Door de bewerking $\times$ wordt aan 3 en 5 toegevoegd 15.
$3+5 = 5+3$ omdat de bewerking $+$ commutatief is.
$3+(4+5) = (3+4)+5$ omdat de bewerking $+$ associatief is.
Evenzo is $3 \times 5 = 5 \times 3$ en $3 \times (4 \times 5) = (3 \times 4) \times 5$ omdat de bewerking $\times$ commutatief en associatief is.
$3 \times (4+5) = (3 \times 4)+(3 \times 5)$ omdat de bewerking $\times$ distributief is ten opzichte van de bewerking $+$.
We gaan nu 'een algebra' maken in de verzameling punten van ons papier. Hiermee bedoelen we, dat we bewerkingen gaan verzinnen, die aan 2 punten A en B een derde punt toevoegen.

1 De bewerking $*$ voegt aan A en B toe het midden C van het lijnstuk AB

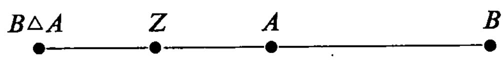


Evenzo betekent $A{*}(A{*}B)$ het midden van het lijnstuk met als uiteinden de punten A en $(A{*}B)$.

2 De bewerking $\triangle$ voegt aan A en B toe het punt D, dat ligt op het verlengde van AB zó dat AB even lang is als BD.



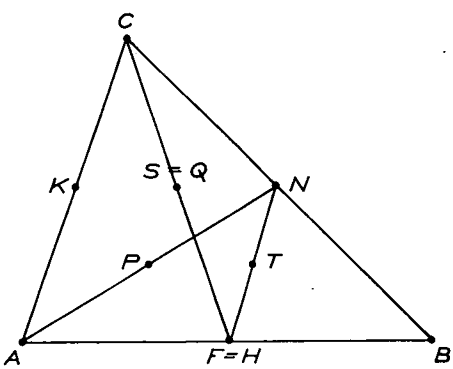
Denk eraan dat $B\triangle A$ een punt E is op het verlengde van BA zó dat BA even lang is als AE. Als we het punt $A{*}(B\triangle A)$ Z noemen dan kunnen we het zó tekenen



Teken een driehoek ABC en geef in deze tekening zo nauwkeurig mogelijk de volgende punten aan:

$F = A{*}B$; $H = B{*}A$; $K = A{*}C$; $N = B{*}C$;

$P = A{*}(B{*}C)$; $Q = (A{*}B){*}C$; $S = (A{*}C){*}(B{*}C)$; $T = (A{*}B){*}(B{*}C)$.

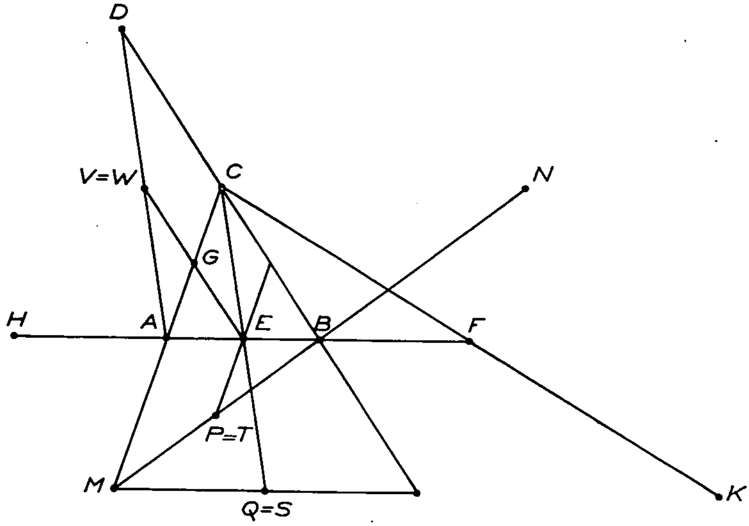


FIGUUR 1

Geef in een tweede tekening de volgende punten aan:

$F = A\triangle B$; $H = B\triangle A$; $M = C\triangle A$; $K = C\triangle(A\triangle B)$; $N = (C\triangle A)\triangle B$

$P = B{*}(C\triangle A)$; $T = (B{*}C)\triangle(B{*}A)$; $Q = C\triangle(A{*}B)$; $S = (C\triangle A){*}(C\triangle B)$.



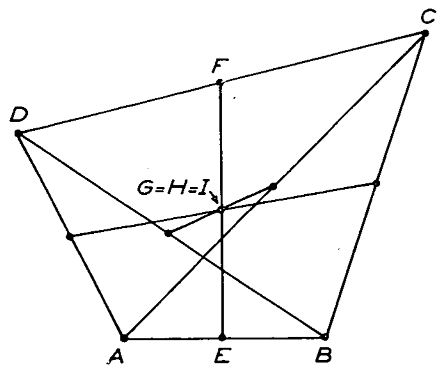
FIGUUR 2

D is het punt op het verlengde van BC zo gelegen, dat $BC = CD$. V is het midden van AD. E is het midden van AB en G is het midden van AC. W is het punt op het verlengde van EG zó gelegen, dat $EG = GW$.
Schrijf nu V en W met behulp van A, B, C en de operatie tekens $*$ en $\triangle$.

Vul nu onderstaande zinnetjes in:

1 De bewerking $*$ heeft wel de . . . . eigenschap.
2 De bewerking $*$ heeft niet de . . . . eigenschap.
3 De bewerking $\triangle$ heeft . . . . . de . . . . eigenschap.
4 De bewerking $\triangle$ heeft . . . . . de . . . . eigenschap.
5 De bewerking $*$ heeft . . . . . de . . . . eigenschap t.o.v. de bewerking $\triangle$.
6 De bewerking $\triangle$ heeft . . . . . de . . . . eigenschap t.o.v. de bewerking $*$.

In een veel later stadium zouden we misschien nog eens op dit voorbeeld terug kunnen komen. Herhalen is iets wat we bijna niet vaak genoeg kunnen doen en als er nog een zinvolle uitbreiding (dat verbeelden we ons tenminste) bij komt is het voor de leerlingen niet eens zo saai!
We nemen aan dat de leerlingen weten wat coördinaten zijn en dat aan elk punt van ons vlak een getallen paar (x, y) toegevoegd kan worden. In een inleidend stukje kan duidelijk gemaakt worden (na enig oefenen met getallenvoorbeelden) dat als $A = (a, p)$ en $B = (b, q)$ het midden M van lijnstuk AB is $(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q)$. Misschien zullen daarna sommige leerlingen de volgende opdracht al verrassend vinden!



FIGUUR 3

De coördinaten van de hoekpunten van de vierhoek $ABCD$ geven we nu een beetje vaag aan met letters (figuur 3).

$A = (a, p) \quad B = (b, q) \quad C = (c, r) \quad D = (d, s)$.

Teken de volgende punten in de figuur en bereken hun coördinaten.

$E = A*B$; $F = C*D$; $G = (A*B)*(C*D)$; $H = (A*D)*(B*C)$;
$I = (A*C)*(B*D)$.

Uit welke eigenschap van de bewerking $*$ volgt het samenvallen van de punten G, H en I?

Tenslotte nog een aantal opdrachten, die wat ingewikkelder zijn en waarbij de leerlingen zelf een onderzoek in moeten stellen.
Deze zijn op verschillende manieren te vereenvoudigen.

1 Onderzoek met behulp van berekeningen van coördinaten van punten of de operatie $*$ associatief is.

2 Stel $A = (a, p)$ en $B = (b, q)$.
Als $F = A \triangle B$ dan is B het midden van ..... Als we de x-coördinaat van F voorstellen door x_F dan kunnen we b uitdrukken in a en x_F en dus ook x_F uitdrukken in a en b. Bepaal een formule voor x_F.

3 Als $A = (4, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (2, 0)$, $D = (0, -2)$, $E = (-2, +4)$, $F = (2, 3)$, $G = B \triangle A$, $H = D \triangle C$, $I = D \triangle B$, $J = E \triangle F$, $K = D \triangle (A*B)$, $L = (D \triangle A)*(D \triangle B)$, bereken dan de coördinaten van de punten G, H, I, J, K en L.
Welk vermoeden ontstaat bij het vergelijken van de coördinaten van K en L?
Probeer dit vermoeden ook eens algemeen te bewijzen door uit te gaan van $D = (d, s) \quad A = (a, p) \quad B = (b, q)$

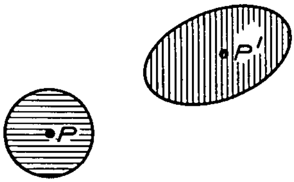
Als men zoveel mogelijk kinderen het plezier bij wil brengen dat dit werk schenken kan, moet men de opdrachten vermoedelijk veel uitgebreider toelichten en inleiden.
Als men dit werk wil gebruiken om te determineren dan moet er niet te veel inleiding bij zijn. Pas echter op, want te weinig inleiding geeft ook een scheef beeld (hebben we helaas ondervonden!).

Continuïteit

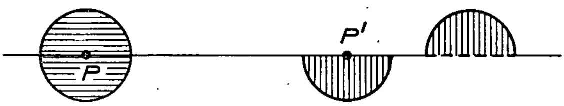
P. G. J. VREDENDUIN
Oosterbeek

In dit artikel wil ik proberen een verslag te geven van de manier, waarop ik in klasse 5β (gymnasium) de continuïteit behandeld heb. Onze school volgt het experimentele programma algebra-analyse voor de bovenbouw. In het kader van dit programma moet men dus de behandeling plaatsen.
Eerst wordt de leerlingen duidelijk gemaakt, wat met continuïteit bedoeld wordt. Nadat zij intuïtief weten, waar het om gaat, kan een echte definitie van continuïteit gegeven worden. Welnu: we hebben het over afbeeldingen. Dat een afbeelding continu is, wil zeggen, dat een kleine verandering van het origineel een kleine verandering van het beeld ten gevolge heeft. Anders gezegd: als men het origineel een kleine verandering laat ondergaan, verandert het beeld niet sprongsgewijs. Is b.v. een vliegtuig op een bepaald moment op Schiphol en enige tijd later in New York, dan is het daar niet sprongsgewijs gekomen, maar heeft een baan van Schiphol naar New York doorlopen.
Nu begint de leerlingen te dagen, wat met continuïteit bedoeld wordt. Ook zal hun duidelijk zijn, dat het betoog elke exactheid mist. Met name is wiskundig niet duidelijk, wat met 'klein' bedoeld wordt. En de ingewijde zal meteen zien, dat de uitleg een vicieuze cirkel vertoont. Het niet sprongsgewijs van Schiphol in Amerika komen is uitgelegd met behulp van de continue baan, die het vliegtuig beschrijft. Het wordt tijd te trachten orde op zaken te stellen en verantwoord uit te leggen, wat een continue afbeelding is.
We bereiden aan de hand van een tweetal voorbeelden, een van een continue en een van een niet-continue afbeelding, de definitie voor. Van essentieel belang is, dat hierbij niet als voorbeeld gekozen zijn een continue en een discontinue functie van **R** naar **R**, maar een tweetal afbeeldingen van het platte vlak naar zichzelf. De tweedimensionale voorbeelden verschaffen de leerling namelijk gemakkelijker een inzicht in het wezen van de continuïteit dan de eendimensionale. Om de bedoeling duidelijk te maken, heb ik eerst als voorbeeld van een continue afbeelding een translatie gekozen en als voorbeeld van een niet-continue een 'aardverschuiving'. Hoewel deze voorbeelden suggestief zijn, zijn ze voor het vervolg niet goed bruikbaar. De translatie heeft het nadeel, dat een cirkelschijf overgaat in een cirkelschijf en de aardverschuiving, dat de ene helft van het vlak invariant is. Liever brengen we dus een kleine modificatie aan.

Een beter voorbeeld van een continue transformatie is een uitrekking (lijnvermenigvuldiging) of, als men daaraan de voorkeur geeft, een willekeurige deformatie. En de aardverschuiving vervangen we door een verschuiving, waarbij de bovenlaag harder schuift dan de onderlaag. De grenslaag delen we b.v. in bij de onderlaag. Kies nu een punt P en een cirkelschijf met middelpunt P en zoek het beeld. Bij de aardverschuiving kiezen we P uiteraard in de grenslaag. We krijgen dan bij de uitrekking figuur 1 en bij de aardverschuiving figuur 2. Het origineel maken we rood en het beeld blauw. In de figuren is rood aangegeven door horizontale arcering en blauw door verticale.



FIGUUR 1

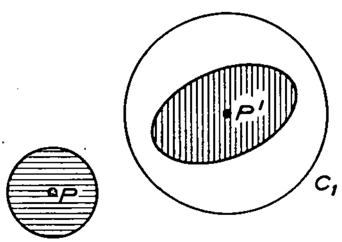


FIGUUR 2

In figuur 1 zien we, dat een kleine verandering van de positie van P een kleine verandering van de positie van P' ten gevolge heeft. In figuur 2 heeft een kleine verandering van de positie van P naar boven een grote (sprongsgewijze) verandering van de positie van P' ten gevolge.

Het zwakke punt in het betoog is nog altijd het woord 'klein'. Met 'dicht bij' P bedoelen we zo iets als: minder dan een bepaalde afstand van P verwijderd. Dus: binnen een bepaalde cirkel met middelpunt P gelegen. Dit brengt ons ertoe een definitie te geven van een omgeving van P. Deze luidt:

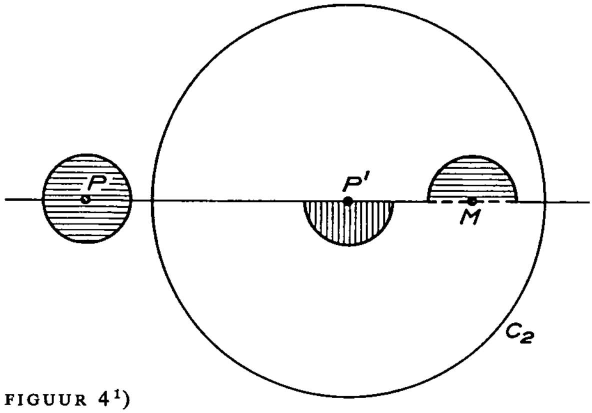
Definitie. Onder een *omgeving van* P verstaan we een verzameling $\{X | \mathrm{d}(X, P) < a\}$, waarin $a \in \mathbf{R}^+$.



FIGUUR 3

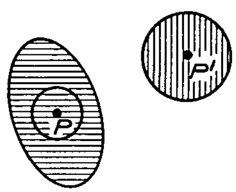
We krijgen nu de neiging als karakteristiek verschil tussen figuur 1 en figuur 2 op te geven: in figuur 1 ligt het beeld van een omgeving van P binnen een omgeving van P' en in figuur 2 niet. Inderdaad zien we in figuur 3, dat het blauwe

beeld van de rode omgeving van P ligt binnen de getekende omgeving C_1 van P'. Maar ook in figuur 4 blijkt het blauwe beeld van de rode omgeving van P binnen de getekende omgeving C_2 van P' te liggen. Zo komen we er dus niet.



FIGUUR 4[1])

Wat is dan wel een karakteristiek verschil? Maak in figuur 3 de cirkel C_1 kleiner. Als we nu de rode omgeving van P ook kleiner maken, dan zal het blauwe beeld weer binnen de nieuwe C_1 vallen. In figuur 4 is dat niet het geval. Maak de cirkel C_2 kleiner. Zodra de straal van C_2 kleiner dan de afstand $P'M$ wordt, is het niet meer mogelijk de rode omgeving van P zo te kiezen, dat het blauwe beeld daarvan *in zijn geheel* binnen C_2 valt.
We hebben dus in zekere zin verkeerd om geredeneerd. We begonnen met het origineel en gingen toen kijken, wat voor bijzonders het beeld had. Zo kwamen we er niet. We moesten beginnen met het beeld. We proberen het nog eens. In figuur 5 is weer de uitrekking getekend. Nu is begonnen met een blauwe omgeving van P' te tekenen. Van deze blauwe omgeving tekenen we het volledig origineel. Dat is weer rood getekend. Nu is het mogelijk een omgeving van P aan te brengen, waarvan het beeld helemaal blauw is. B.v. het in figuur 5 getekende kleine cirkelschijfje met middelpunt P.

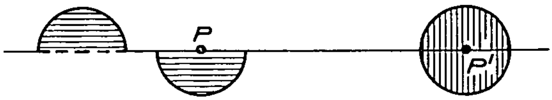


FIGUUR 5[2])

In figuur 6 zien we de aardverschuiving weer voorgesteld. Ook nu beginnen we met een blauwe omgeving van P'. Het volledig origineel is rood getekend. Probeer nu eens een omgeving van P te tekenen, waarvan het beeld helemaal blauw is. Dat lukt niet.

[1]) De arcering van de halve cirkel M moet verticaal zijn.

[2]) De middellijn van cirkel P^1 moet even lang zijn als de lange as van de ellips.



FIGUUR 6

Hiermee is een karakteristiek verschil tussen de twee afbeeldingen gevonden. Wat is dus het kenmerkende van een continue afbeelding? *Kies een blauwe omgeving van P'. Er is dan steeds een rode omgeving van P te vinden, waarvan het beeld helemaal blauw is.*

Ik zou niet graag deze suggestieve definitie van een continue afbeelding vervangen door een, die verbaal correcter is, en laat het dus hierbij.

Aan de hand van enkele voorbeelden wordt dit nieuwe begrip getraind.

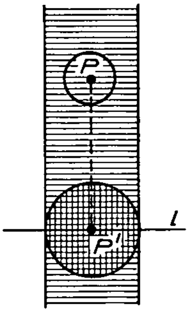
Enkele voorbeelden van continue transformaties:

a Een vermenigvuldiging.

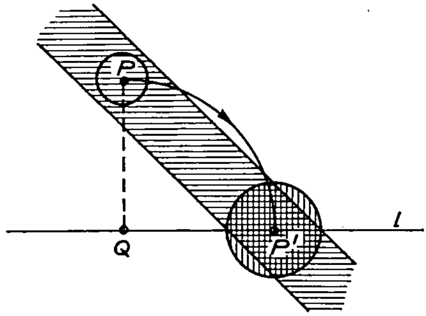
b De projectie van de punten van een vlak op een lijn *l*. In figuur 7 ziet men een punt *P* met zijn beeld *P'*. Getekend is een blauwe omgeving van *P'*. Verder is het rode volledig origineel daarvan getekend. Om *P* kunnen we binnen het rode gebied een cirkelschijf aanbrengen. Het beeld van deze rode omgeving van *P* is helemaal blauw.

c In figuur 8 is *l* een vaste lijn. Kies *P*. Laat uit *P* een loodlijn op *l* neer en noem het voetpunt *Q*. Beschrijf om *P* een cirkelboog 'rechtsom' van 90°, waarvan het uiteinde *P'* dus op *l* ligt. Dit punt *P'* is per definitie het beeld van *P*. Nu controleren we, dat deze afbeelding continu is. Getekend is een blauwe omgeving van *P'* en het rode volledig origineel daarvan. Er is een cirkelschijf om *P* binnen dit rode gebied. Van deze omgeving van *P* is het beeld dus helemaal blauw.

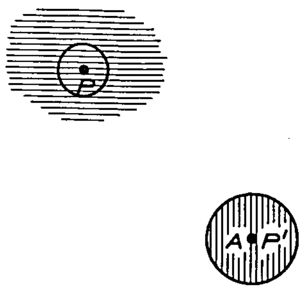
d Een constante afbeelding. Elk punt *P* heeft hetzelfde beeldpunt *A*. Kies een blauwe omgeving van *P'* = *A* (figuur 9). Het rode volledig origineel hiervan is het gehele vlak. Dus is er stellig een omgeving van *P* te vinden, waarvan het beeld helemaal blauw is. Het doet er zelfs niet toe, welke omgeving van *P* je kiest; van elke omgeving is het beeld helemaal blauw.



FIGUUR 7



FIGUUR 8

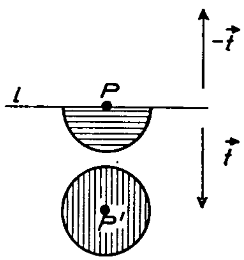


FIGUUR 9

Dit laatste resultaat is belangrijk. Dat een constante afbeelding continu is, is voor geen enkele leerling, die het begrip continu alleen langs intuïtieve weg benaderd heeft, duidelijk. Juist in een dergelijk 'triviaal' geval blijkt, hoezeer we een precieze definitie nodig hebben.

Enkele voorbeelden van niet-continue afbeeldingen.

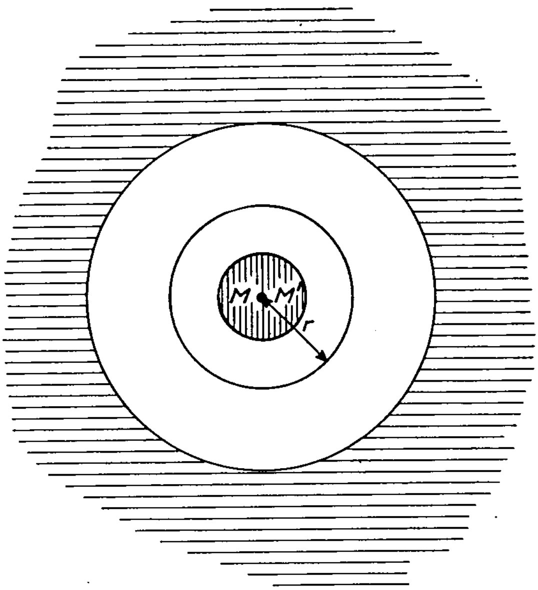
a Een lijn l verdeelt het vlak in twee delen: een gesloten half vlak ('beneden' l) en een open half vlak 'boven' l (figuur 10). Het onderste half vlak laten we een translatie met vector t ondergaan, het bovenste half vlak een translatie met vector $-t$. Getekend is een punt P met zijn beeld P', een blauwe omgeving van P' en het rode volledig origineel ervan. Er is geen rode omgeving van P, waarvan het beeld helemaal blauw is.



FIGUUR 10

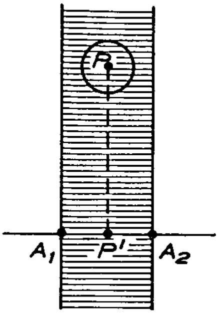
b Gegeven is $\odot(M, r)$. Het beeld van P is het punt P' op de halve lijn MP, waarvoor geldt: $MP' \cdot MP = r^2$, voor het geval $P \neq M$. Verder is $M' = M$. Kies een blauwe omgeving van M'. Teken het rode volledig origineel; dit bestaat uit het horizontaal gearceerde deel van figuur 11 plus het punt M. Er is geen rode omgeving van M, waarvan het beeld helemaal blauw is.

Totnogtoe hebben we het alleen maar gehad over continuïteit van afbeeldingen van een plat vlak naar zichzelf. We proberen nu dit begrip uit te breiden tot continuïteit van afbeeldingen in het algemeen. We herhalen daartoe eerst, wat onder continuïteit verstaan werd: kies een blauwe omgeving van een beeldpunt P'; er is dan een rode omgeving van het origineel P te vinden, waarvan het beeld helemaal blauw is.



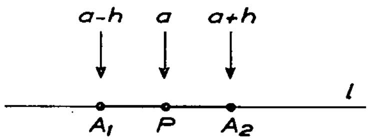
FIGUUR 11

Uit deze omschrijving blijkt, dat we alleen van continuïteit kunnen spreken, als we weten, wat een omgeving is. Onder een omgeving van P hebben we verstaan een verzameling $\{X|d(X, P) < a\}$, waarin $a \in \mathbf{R}^+$. We kunnen dus van omgevingen spreken, zodra we een afstand gedefinieerd hebben. Dus:
Is V een verzameling, tussen de elementen waarvan een afstand gedefinieerd is, dan verstaan we onder een omgeving van $P \in V$ een verzameling $\{X|d(X,P) < a\}$, waarin $a \in \mathbf{R}^+$.
Zijn V en W twee verzamelingen, waarin een afstand gedefinieerd is, en is f een afbeelding van V naar W, dan heet deze afbeelding continu, als bij een blauwe omgeving van $P' \in W$ steeds een rode omgeving van $P \in V$ te vinden is, waarvan het beeld helemaal blauw is.
We kennen verschillende verzamelingen, waarin een afstand gedefinieerd is. Behalve het platte vlak is namelijk ook een afstand gedefinieerd in een rechte lijn en in de ruimte. We kunnen dus ook spreken over continue afbeeldingen van een plat vlak naar een rechte lijn, van de ruimte naar de ruimte, van een lijn naar een lijn, enz. In figuur 7 hebben we de projectie beschouwd als afbeelding van een plat vlak naar zichzelf. We kunnen deze projectie natuurlijk ook beschouwen als afbeelding van het vlak naar de lijn l, waarop geprojecteerd wordt. Ook dan is de afbeelding continu. In figuur 12 is dit duidelijk gemaakt. Van een blauwe omgeving van P' (en dat is nu een open interval A_1A_2 op l en niet meer een cirkelschijf) is het origineel rood gekleurd. Er bestaat blijkbaar weer een rode omgeving van P, waarvan het beeld helemaal blauw is.
Andere voorbeelden zijn afbeeldingen van een lijn naar een lijn, zoals een translatie, een vermenigvuldiging, een parallelprojectie, een centrale projectie.



FIGUUR 12

Een andere verzameling, waarin we een afstand kunnen definiëren, is de verzameling **R** van de reële getallen. Onder de afstand van twee reële getallen a en b verstaan we $|a-b|$. Een omgeving van een reëel getal a is dan een open interval $(a-h,\ a+h)$, waarin $h \in \mathbf{R}^+$.
Als eerste afbeelding, waarin **R** betrokken is, beschouwen we de getallenlijn. Dit is een afbeelding van **R** naar de verzameling van de punten van een lijn l. Deze afbeelding is continu. Om dit in te zien kiezen we een punt P op l (figuur 13) en een blauwe omgeving A_1A_2 van P. Onderstel, dat P het beeld is van het reële getal a en dat A_1 en A_2 de beelden zijn van resp. $a-h$ en $a+h$. Dan is er een rode omgeving van a, waarvan het beeld helemaal blauw is, namelijk de omgeving $(a-h,\ a+h)$.



FIGUUR 13

Ten slotte beschouwen we de afbeeldingen van **R** of van een echt deel van **R** naar **R**. Deze afbeeldingen noemen we gemakshalve functies. Als voorbeeld van een continue functie kiezen we

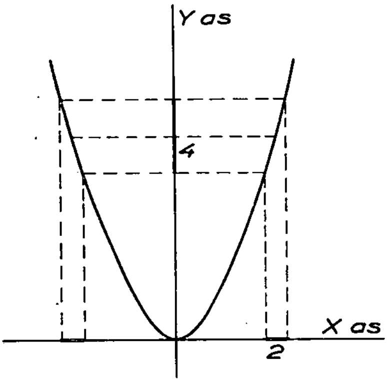
$$f: x \to x^2.$$

Kies een origineel en zijn beeld, b.v. 2 en 4. Kies een blauwe omgeving van 4, dus een interval $(4-h, 4+h)$, waarin $h \in \mathbf{R}^+$. Is hierbij een rode omgeving van 2 te vinden, waarvan het beeld helemaal blauw is? We onderzoeken weer het volledig origineel van $(4-h, 4+h)$. Hiertoe behoort het interval $(\sqrt{(4-h)}, \sqrt{(4+h)})$. Omdat

$$\sqrt{(4-h)} < 2 < \sqrt{(4+h)},$$

is er een omgeving van 2, die een deel is van $(\sqrt{(4-h)}, \sqrt{(4+h)})$ en waarvan het

beeld dus helemaal blauw is. In figuur 14 is de grafiek van de functie $x \rightarrow x^2$ getekend. Een blauwe omgeving van 4 is op de y-as getekend en het volledig origineel daarvan op de x-as. Dit bestaat uit twee intervallen, waarvan alleen het rechter voor ons van belang is.

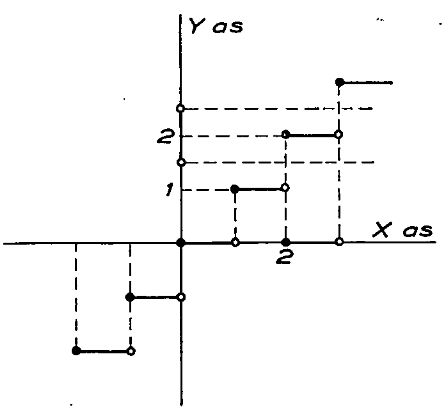


FIGUUR 14

Een voorbeeld van een niet-continue functie is het entier van x, gedefinieerd door:

E : $x \rightarrow$ het grootste gehele getal, dat $\leqq x$ is.

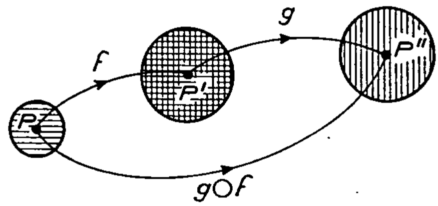
In figuur 15 is de grafiek van de functie E getekend. Kies als origineel 2. Het beeld hiervan is 2. Kies een blauwe omgeving (op de y-as) van 2, b.v. $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$. Het volledig origineel hiervan is het interval [2, 3). Is er op de x-as een rode omgeving van 2, waarvan het beeld helemaal blauw is? Kennelijk niet, want hoe men deze omgeving ook kiest, tot het beeld zal het getal 1 behoren.



FIGUUR 15

Nu nog enkele stellingen over continue afbeeldingen.

Stelling. Als f een continue afbeelding is van V naar W en g een continue afbeelding van W naar U, dan is $g \circ f$ een continue afbeelding van V naar U.



FIGUUR 16

Bewijs. Onderstel $P' = f(P)$ en $P'' = g(P')$ (figuur 16). Beschouw eerst de afbeelding g. Kies een blauwe omgeving van P''. Daarbij is een rode omgeving van P' te vinden, waarvan het beeld helemaal blauw is.
Beschouw nu de afbeelding f. Kies een blauwe omgeving van P' en kies daarvoor de omgeving van P', die we zojuist rood hebben gemaakt. Er is dan een rode omgeving van P, waarvan het beeld helemaal blauw is.
Beschouw ten slotte de afbeelding $g \circ f$. Bij de gekozen blauwe omgeving van P'' hebben we nu een rode omgeving van P gevonden, waarvan het beeld helemaal blauw is. Dus is $g \circ f$ continu.

Stelling. Als f en g continue functies zijn, dan zijn ook continu de functies:

$$f+g, f-g, f \cdot g, \frac{f}{g}.$$

Deze stellingen worden vermeld en plausibel gemaakt, maar niet bewezen, omdat dat onevenredig veel tijd en energie zou kosten. Natuurlijk zeggen we wel expliciet, dat we het bewijs achterwege laten.
Omdat de functies

$$c : x \rightarrow c \text{ en } i : x \rightarrow x$$

continu zijn, zijn nu alle rationale functies continu.

Opmerkingen. In het voorgaande is niet gesproken over de continuïteit van een afbeelding in P. Er is alleen gesproken over continue afbeeldingen en continue functies. Voor het moment hebben we daar genoeg aan.
Uit de definitie van een continue functie volgt, dat een functie continu is, als hij continu is in elk reëel getal, dat tot de definitieverzameling behoort. Volgens de gegeven definitie is de functie $1/x$ dus een continue functie, want hij is continu in elke x, waarvoor $x \neq 0$. Vandaar, dat we zonder restrictie konden zeggen, dat uit de continuïteit van de functies f en g de continuïteit van f/g volgt.

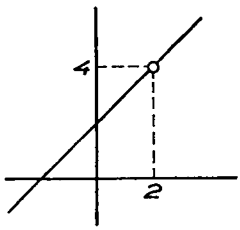
Nu de limieten. Als voorbeeld kiezen we de functie

$$f : x \to \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

We merken op, dat voor $x \neq 2$ geldt

$$f(x) = x + 2$$

en dat voor $x = 2$ de functie niet gedefinieerd is. De grafiek is dus een rechte lijn minus een punt. De grafiek is getekend in figuur 17.



FIGUUR 17

Het ligt voor de hand het gat in de grafiek op te vullen door de functie voor $x = 2$ de waarde 4 toe te kennen. Beter gezegd: we ontwerpen een nieuwe functie, f^*, gedefinieerd door

$$f^* = f \text{ voor } x \neq 2$$

$$f^*(2) = 4.$$

De functie f^* is gedefinieerd voor $x = 2$ en de functiewaarde voor $x = 2$ is zodanig gekozen, dat f^* continu is.
We noemen nu het getal 4 de continumakende waarde voor $x = 2$ (voor f). Ook zeggen we wel, dat 4 de limiet van f is voor x nadert tot 2. We schrijven:

$$\lim_{x=2} f(x) = 4.$$

Hier stoten we op enkele moeilijkheden. Het vinden van de continumakende waarde en dus van de limiet heeft niets te maken met het laten veranderen van het origineel x. We laten x niet waarden doorlopen, die tot 2 naderen en kijken, wat er dan met de functiewaarde gebeurt. Het nemen van de limiet is geen dynamisch, maar een statisch proces. Vandaar, dat ik onder het limietteken schrijf '$x = 2$' en niet '$x \to 2$'. Te voren heb ik gezegd: 'Ook zeggen we wel, dat 4 de limiet van f is voor x nadert tot 2.' Ik heb dit opzettelijk volgens de traditie zo

geformuleerd. Herleest u het, dan ziet u hoe onbruikbaar de traditie voor ons is. Wij moeten zeggen: '... dat 4 de limiet van f is voor $x = 2$.'

Er is nog iets. We spreken over de limiet van de functie. We schrijven '$\lim_{x=2} f(x)$' en hier staat: de limiet van de functiewaarde. Ik geloof, dat we verstandig doen dit zo te blijven doen. Correcter zou zijn: $\lim_{x=2} x \to f(x)$. Maar we kunnen het deel '$x \to$ ' zonder bezwaar weglaten, omdat het impliciet weergegeven wordt door het '$x =$' onder het limietteken.

We keren terug naar de functie

$$f : x \to \frac{x^2-4}{x-2}.$$

We vragen nu naar $\lim_{x=3} f(x)$. We moeten dus een functie f^* ontwerpen, waarvoor geldt

$$f^* = f \text{ voor } x \neq 3$$

en die voor $x = 3$ een zodanige waarde heeft, dat hij continu is. Nu is de functie f reeds continu en gedefinieerd voor $x = 3$. Omdat $f(x) = 5$, kunnen we dus volstaan met te kiezen: $f^*(x) = 5$.

Dus: als een functie f continu is en reeds gedefinieerd voor $x = a$, dan is de limiet voor $x = a$ (de continumakende waarde) gelijk aan $f(a)$. Dit resultaat komt overeen met de klassieke definitie van een continue functie.

De leerling zal het nut van een limietdefinitie beter gaan inzien, zodra hij minder triviale gevallen onder ogen krijgt. Een voorbeeld hiervan is

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x}.$$

Het grote voordeel van de gegeven behandeling van continuïteit en van limiet is, dat voor de leerling deze moeilijke begrippen gemakkelijk en ook technisch gemakkelijk hanteerbaar gemaakt worden.

Blijven nog over de 'oneigenlijke' limieten, waarin x nadert tot oneindig of tot min-oneindig, of de functiewaarde nadert tot oneindig of min-oneindig. De officiële wiskunde kent fraaie methoden om het voorgaande betoog te generaliseren en zo tot een meer algemene limietdefinitie te komen, waaronder zowel de eigenlijke als de oneigenlijke limieten begrepen worden. Helaas zal het niet mogelijk zijn deze in wiskunde I te behandelen; de tijd zal ontbreken. Degene, die in wiskunde II als keuze-onderwerp topologie kiest, zal een meer algemene limietdefinitie met vrucht kunnen geven. Maar in wiskunde I zullen we ons tevreden moeten stellen met een intuïtieve behandeling van de oneigenlijke limieten.

De lege verzameling in het mavo

W. KLEIJNE
Maassluis

Hoe wij het wiskunde-onderwijs volgens het nieuwe programma ook geven, ieder zal wel begonnen zijn met de verzamelingen. Wil de vernieuwing tot zijn recht kunnen komen, dan is dit ook noodzakelijk. In ons gehele wiskunde-onderwijs immers, zullen wij de taal der verzamelingen moeten spreken. Nu hangt het uiteraard van de diepgang en de omvang van de te onderwijzen wiskundestof af, hoever we moeten doordringen in de verzamelingenleer.
Op een onderdeel hiervan wil ik nader ingaan: de lege verzameling, speciaal in het brugjaar mavo.
Het behoeft geen betoog, dat dit begrip gekend moet worden. Na het begrip verzameling in het algemeen en de lege verzameling in het bijzonder, heb ik bij mijn mavo-leerlingen bij de voortgezette behandeling van de verzamelingen enige specifieke moeilijkheden aangetroffen wat betreft de lege verzameling. Het kostte de meeste kinderen enige moeite in te zien, dat ϕ en $\{0\}$ verschillende verzamelingen zijn. Deze leerlingen denken bij de laatste verzameling eerder aan de hoeveelheid, die het getal 0 voorstelt, dan aan het feit, dat deze verzameling precies één element bevat en wel het getal 0. Als het onderscheid tussen beide verzamelingen duidelijk is, dan is het een kleine stap om in te zien, dat $\{0\}$ geen deelverzameling is van de lege verzameling. Dat omgekeerd $\phi \subset \{0\}$ is een gevolg van het feit, dat de lege verzameling deelverzameling is van iedere verzameling. Dit laatste, hoe belangrijk ook vanuit theoretisch oogpunt, is voor de leerlingen onverteerbaar, in ieder geval op mavo-niveau. Pogingen om dit voorstelbaar te maken verlopen in de trant van: 'Kies geen element uit deze verzameling. Je hebt nu een lege verzameling'. Dit blijft voor velen een vaag begrepen woordenspel. Bovendien trek ik de gebruikswaarde van dit feit in de schoolwiskunde sterk in twijfel. Nu is het niet de bedoeling in het voortgezet onderwijs een leer der verzamelingen te doceren. De verzamelingen hebben hier juist een dienende functie te vervullen. Daar het bovendien nogal wat tijd kost bovengenoemde moeilijkheden voor mavo-leerlingen duidelijk te maken, lijkt het mij gerechtvaardigd uitgebreide 'manipulaties' met de lege verzameling in de mavo-brugklas achterwege te laten. Als de leerlingen doorhebben wat een lege verzameling precies is, is dit mijns inziens voor het mavo voldoende.

Commentaar van de redactie:

Het heeft in het brugjaar weinig of geen zin vast te stellen dat de lege verzameling deelverzameling is van iedere verzameling.
Wanneer een leerling begrijpt wat het betekent dat de oplossingsverzameling van een open bewering leeg is, dan is dat genoeg. Het verschil tussen ϕ en $\{0\}$ zou kunnen blijken bij het oplossen in N van $x^2 = 3$ en $x^2 = 0$.

Kr.

Boekbespreking

H. Bauer, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie*, Walter de Gruyter, Berlin, 1968, 342 blz., DM 32.—.

De inhoud van dit deel uit de serie 'Mathematische Lehrbücher' is oorspronkelijk opgezet voor twee boekjes in de goedkope en voortreffelijke 'Sammlung Göschen'. Na het verschijnen van het eerste hiervan in 1964 (Band 1216/1216a) werd echter besloten het geheel in een gebonden uitgave het licht te doen zien. In de opbouw van het nu verschenen boek vindt men deze opzet terug in de behandeling van het onderwerp in twee ronden: eerst een inleiding in de maat- en integratietheorie, dan een inleiding in de kansrekening, vervolgens een voortgezette uiteenzetting van de maat- en integratietheorie en een verdere uitwerking van de waarschijnlijkheidsrekening. Hierbij is in de eerste ronde de kansrekening secundair, maar deze krijgt in de tweede ronde de meeste aandacht.
Het eerste stuk maat- en integratietheorie omvat een inleiding tot het begrip maat op een σ-algebra, inclusief het principe van de maatuitbreiding, voorts meetbare afbeeldingen en een introductie van het integraalbegrip. Verder nog o.a. de bekende convergentiestellingen en produktmaten. Met behulp hiervan worden kansruimten en stochastische grootheden gedefinieerd, terwijl bovendien enige eigenschappen van verdelingsfuncties en momenten de revue passeren. Onafhankelijkheid en de wetten van de grote aantallen vormen de slotonderwerpen van deze inleiding.
Bij de voortzetting van de maat- en integratietheorie wordt de Fourier analyse van maten (kansstelsels) en meetbare functies (stochastische grootheden) behandeld. De meeste aandacht wordt echter besteed aan het onderwerp maten op topologische ruimten. Bij de voortgezette behandeling van de waarschijnlijkheidsrekening wordt van het voorgaande o.a. gebruik gemaakt voor de bewijzen van enige versies van de centrale limietstelling, voor de definitie en enige eigenschappen van voorwaardelijke verwachtingen; verder voor martingalen, een algemene definitie van stochastische processen en een wat verdergaande behandeling van enige typen van stochastische processen zoals markovprocessen en poissonprocessen.
Het boek is geschreven in een zeer zakelijke directe stijl. Er wordt niet veel toelichting gegeven bij nieuwe begrippen en ook belangrijke resultaten zijn meestal slechts van een summiere verbale begeleiding voorzien.
Zowel de analytische als de abstract wiskundige aspecten van het onderwerp komen goed tot hun recht. Als geheel levert het boek een prachtige hoeveelheid gereedschap voor studie en onderzoek in de verschillende deelgebieden van de waarschijnlijkheidsrekening. Met name ook de ergodentheoreticus zal er veel van zijn gading in vinden.
Het beste zal dit boek tot zijn recht komen als handleiding bij cursus of groepsstudie. Voor zelfstudie lijkt het door zijn beknoptheid van presentatie minder geschikt. Ook als referentiebron zal het werk nuttige diensten kunnen bewijzen.

J. Wessels

Wiskunde in de brugklas van een Montessorilyceum

H. C. VERNOUT
Haarlem

'Un esprit sans culture mathématique est, aujourd'hui, comparable à un homme qui ignorait l'alphabet.'

Maria Montessori

De leerlingen, die tot de brugklas zijn toegelaten staan – wiskundig gezien – aan het begin van een nieuwe ontwikkeling. Wat zij meebrengen van de basisschool is weinig meer dan een zekere rekenvaardigheid en enige kennis van figuren. Deze rekenvaardigheid is terug te brengen tot de kennis van de rij van de natuurlijke getallen en de hoofdoperaties daarin, kennis van de telrij dus. Wat de figuren betreft: enkele symmetrische figuren als vierkant, kubus en bol zijn bekende zaken.

Telrij en figuren vormen twee nog ongestructureerde totaliteiten, die om structurering vragen en dat is dan het eerste doel van de wiskunde in de brugklas. In de algebra zullen we dus een meer gelede kennis en een duidelijk inzicht moeten aanbrengen van de getallenrijen, de soorten getallen en de operaties in deze rijen. Voor de meetkunde geldt hetzelfde voor de figuren, de eigenschappen van en in deze figuren, hetzij in de ruimte of in het platte vlak. Geen axioma's dus, geen bewijzen, geen relatiebeschouwingen.

Het tweede doel is de leerlingen te laten ontdekken, dat zij zelf in staat zijn met deze structurering iets te doen. Zij moeten dus zelf aan de hand van vragen en opgaven tot begrip komen. Hoe dit alles precies in zijn werk moet gaan, laat ik hier buiten beschouwing. Het is niet de bedoeling van dit artikel een theoretische didaktiek te geven, maar een praktische, een methodiek dus. Bij dit zelf ontdekken – wat geen herontdekken hoeft te zijn – zullen niet alle leerlingen op hetzelfde moment hetzelfde kunnen presteren. Er zal dus een tempoverschil optreden. Niet alleen een verschil in verwerkingstempo maar ook in begripstempo. Deze tempi zijn niet evenredig met elkaar. Een serieuze leerling met een redelijke intelligentie, die iedere opdracht uitvoert tot hij deze echt door heeft zal vaak slechts langzaam opschieten; zijn verwerkingstempo ligt dus laag. Een andere leerling met dezelfde intelligentie die de zaak sneller doorziet en bovendien niet altijd de finesses nagaat zal sneller opschieten. Ook de leerling, die oppervlakkig te werk gaat, zich weinig rekenschap geeft van onjuistheden, kan soms snel opschieten, maar het begripstempo ligt laag. Elke keer weer zal hij in moeilijkheden komen.

Gevolg hiervan is, dat na enige tijd de leerlingen op verschillende plaatsen in de leerstof bezig zijn, dat zij een verschillende manier van aanpak vertonen, dat zij op verschillend begripsniveau werken. Wil men dit niet verstoren, dan is het vrijwel niet meer mogelijk de stof klassikaal aan te bieden. Juist in een brugklas is het werken op verschillend begripsniveau van belang, omdat men op die manier vanzelf over een selectiemiddel beschikt, dat niet van toevallige of uitwendige factoren afhangt.

Het wegvallen van de klassikale informatie houdt niet in, dat de leerlingen nu maar op eigen houtje verder werken. In de plaats daarvan komen een aantal andere mogelijkheden tot informatie, zoals:

de individuele informatie van de docent op het moment, dat de leerling daaraan behoefte heeft. De uitleg zal nu steeds betrekking hebben op en juist toereikend kunnen zijn voor dat speciale probleem van die leerling.

de onderlinge informatie van de ene leerling aan de andere, wanneer er wordtsamengewerkt of wanneer de docent een vragen de leerling naar een andere verwijst. Het blijkt hierbij vaak, dat die andere leerling het probleem nu pas goed gaat zien.

de informatie, die het leerboek geeft, dat dan een werkboek moet zijn. Deze informatie moet dan bestaan uit een zeer korte aanwijzing gevolgd door een vraagstelling, waaraan de leerling kan toetsen of hij de uitleg begrepen heeft. In deze informatie moeten zo weinig mogelijk voorbeelden voorkomen, want deze kunnen leiden tot begripsloos navolgen.

de informatie, die leerlingen kunnen krijgen van leerlingen uit hogere groepen. Deze mogelijkheid bestaat alleen, als er uren zijn, waarin de leerlingen uit verschillende groepen door elkaar aan wiskunde kunnen werken.

Het wegvallen van de klassikale informatie houdt ook niet in, dat men geen klassikale of groepsbesprekingen meer kan houden. Daartoe blijven de volgende mogelijkheden:

de docent kan een betrekkelijk losstaand onderwerp behandelen, waarbij een uitvoerige uitleg nodig is. Zo'n onderwerp zou b.v. de commutativiteit kunnen zijn. De docent kan dan voorbeelden bespreken van niet-commutatieve bewerkingen e.d. In een hogere klas kan dat b.v. het vektorbegrip zijn met het optellen en vermenigvuldigen.

de docent kan enige tijd, nadat alle of bijna alle leerlingen een bepaald gedeelte hebben doorgewerkt met de groep nog eens een overzicht samenstellen van dat gedeelte, een aantal toepassingen laten zien.

Ook kan de docent instructie geven aan een groep leerlingen, die op dat moment daarvoor in aanmerking komt. Dit is alleen mogelijk, wanneer het rooster niet op ieder uur een vaste klas aan een docent toewijst, maar wanneer de docent op een bepaald uur een bepaald onderwerp aankondigt voor alle leerlingen, die daar aan toe zijn. Dit is dus het cursusidee voor flexibele groepen. Op onze school is dit nog niet verwezenlijkt.

Ik heb tot nu toe in de brugklas niet de behoefte gevoeld één van deze manieren toe te passen. De leerlingen vertonen uit zichzelf nog een behoorlijke werklust, die nog niet verstoord wordt door de puberteit. In het tweede jaar daarentegen, vooral in de periode tot Kerstmis treedt een vertraging op, die door dergelijke lessen gedeeltelijk kan worden opgevangen, terwijl dan tevens de gelegenheid bestaat het een en ander te herhalen op een enigszins hoger niveau.

Door boven beschreven manier van werken in de brugklas hebben de leerlingen er een aantal vrijheden bijgekregen maar ook een aantal beperkingen. Hoewel het lijkt alsof de leerlingen het daardoor gemakkelijker hebben, blijkt toch steeds weer, dat deze werkwijze meer van ze eist; meer een beroep doet op hun hele persoonlijke inzet dan de gewone klassikale werkwijze. Vooral leerlingen, die geen montessoriaanse vooropleiding op de basisschool gehad hebben, hebben vaak enige moeite zich aan te passen.

We bespreken nu een aantal van die vrijheden.

de leerlingen kunnen op ieder moment kiezen of ze algebra of meetkunde willen doen indien daarvoor twee aparte boeken worden gebruikt of ze kunnen de hoofdstukken in andere volgorde maken bij gebruik van één boek. Daarbij moet de leerlingen wel duidelijk gemaakt worden, dat dit slechts een beperkte vrijheid is omdat soms het ene onderdeel bij het andere gebruikt moet worden en omdat lange tijd niet aan een vak werken tot vergeten leidt. Het is trouwens op een Montessorischool een algemeen principe dat men de leerling bij iedere vrijheid ook beperkingen laat zien; vrijheid in gebondenheid dus en niet het doe-maar-wat-je-wil-principe zoals buitenstaanders vaak (schertsenderwijs?) zeggen.

de leerlingen moeten per week minstens twee uur aan wiskunde werken, maar kunnen er meer tijd aan besteden. Deze tijd wordt gevonden in de keuze werktijd, een dagelijkse periode van twee uur of door thuis te werken. Het is duidelijk, dat het niet mogelijk is verplicht huiswerk op te geven.

de leerlingen kunnen zelf bepalen, wanneer ze een test willen maken over een verwerkt hoofdstuk, waarbij dit moment weer niet te lang uitgesteld mag worden. De test vervult namelijk nog andere functies dan alleen controleren. We komen hierop straks terug.

de leerlingen kunnen zelf bepalen of ze alleen willen werken of met één of meer anderen samen. Deze samenwerking mag echter niet de vorm aannemen van overnemen wat de betere partner zegt en schrijft. Soms is het dus nodig deze samenwerking te verbreken. Meestal echter gaat dit vanzelf. Of de betere leerling voelt zich gehandicapt door de mindere omdat er te weinig samenspraak is of de mindere merkt zelf dat hij te veel van de ander overneemt. Dit laatste komt geregeld voor, omdat de leerling er bij deze werkwijze er geen behoefte aan voelt zich beter voor te doen dan hij is.

de leerlingen kunnen hun werk grotendeels zelf controleren met een antwoordenlijst. Dit wordt meestal zeer nauwkeurig gedaan. Hier wordt ook vol-

daan aan een van de montessoriprincipes, n.l. dat van de mogelijkheid tot directe zelfcontrole. Het is geen uitzondering, wanneer een leerling mij vraagt wat de fout in het antwoord is, als hij krijgt 2a+3b, terwijl er in de antwoordenlijst staat 3b+2a. Het overschrijven van antwoorden komt ook weinig voor omdat hem dat eveneens geen enkel voordeel oplevert.

het is mogelijk een leerling, die iets nog niet goed door heeft wat extra opgaven te laten maken, zowel voor als na de test. Men kan ook leerlingen die ergens veel moeite mee hebben, enkele vragen laten overslaan of inplaats van deze vragen enkele eenvoudiger opgaven geven. Verder kan men aan zeer goede of geïnteresseerde leerlingen extrastof opgeven. Juist de zeer goede leerling heeft hieraan behoefte. Doet men dit niet, dan zal hij minder tijd aan het vak gaan besteden, waardoor de belangstelling meestal afneemt ofwel zal hij zover vooruit lopen dat er een te groot niveauverschil optreedt ten opzichte van andere vakken.

Het is nodig nu iets te zeggen over de controlemogelijkheden. In de eerste plaats moet iedere afgewerkte bladzijde of hoofdstuk in een werkboek worden afgetekend. Iedere leerling heeft zo'n werkboek, waarin voor alle vakken de jaarstof staat aangegeven met daarnaast ruimte voor parafen en opmerkingen. Ook de extrastof wordt hierin afgetekend. De leerling zelf, de klasseleider, de deelschoolleider, de rector en de ouders kunnen zich zodoende op ieder moment een indruk vormen van de stand van zaken. Bij het aftekenen kan de docent meteen nagaan, indien wenselijk of dit kleine gedeelte voldoende begrepen is b.v. door een enkel antwoord na te vragen of door een zeer kort gesprek. Daarnaast wordt aangegeven wat een normaal verwerkingstempo is, b.v. gemiddeld drie bladzijden per week. Ik geef dit iedere maand aan iedere leerling op in de vorm van het minimum aantal bladzijden, dat ik van hem verwacht. Eens per maand wordt iedere leerling dus gecontroleerd en deze controle blijkt een belangrijke stimulans te zijn.
Nadat een of meerdere hoofdstukken klaar zijn, volgt een test. Deze test bestaat uit enkele opgaven, die het verwerkte controleren, maar meestal zijn er ook enkele vragen bij, die slechts zijdelings op het onderwerp betrekking hebben en die vaak niet door de leerling alleen gemaakt kunnen worden. De test hoeft dan ook niet alleen en zonder hulpmiddelen gemaakt worden. De leerlingen mogen boek en schrift erbij gebruiken en ze mogen ook hulp vragen aan de docent of aan andere leerlingen. Aangezien ook hierbij weer geldt, dat de leerlingen geen behoefte hebben zich beter voor te doen dan zij zijn, wordt hiervan weinig misbruik gemaakt. De test wordt nagekeken, meestal in het bijzijn van de leerling, de fouten worden besproken en verbeterd. Zijn bepaalde dingen niet goed begrepen, dan kunnen extra vragen volgen. Het resultaat hiervan kan zijn: opschorting van de test tot een later tijdstip eventueel met een extra-opdracht of wel aftekenen voor in orde in het werkboek. Is de test matig verlopen dan luidt de kwalificatie meestal: net in orde. Vertoont de leerling een goed inzicht in de stof dan kan dat met 'goed' worden beloond.

De test heeft dus niet alleen een controlerende werking, maar wordt tevens gebruikt om nog gesignaleerde tekorten aan te vullen en juist dit laatste acht ik een belangrijk onderdeel van de controle.

Aan deze methode van werken zijn een aantal voordelen verbonden op allerlei gebied.
Zo leert de docent zijn leerlingen snel kennen, omdat hij vaak contact met elke leerling apart heeft. Het beoordelen van zijn prestaties hangt niet alleen meer af van een aantal cijfers, gegeven voor eenzelfde aantal proefwerken, maar wordt gevormd uit een voortdurende stroom indrukken. Bovendien kan een veelvuldig contact de vertrouwelijkheid tussen docent en leerling verbeteren, waardoor o.a. een gezamenlijk overleg mogelijk is over het werk en de werkwijze.
Wanneer men voor meerdere vakken een dergelijke werkwijze volgt, is het niet nodig de brugklassen aan een scholengemeenschap van te voren te selecteren. Het werken met heterogene brugklassen, wat door velen wel als wenselijk, maar als moeilijk te verwezenlijken gezien woıdt, geeft nu weinig moeilijkheden meer.
Naast deze min of meer organisatorische voordelen zijn er enkele leerpsychologische winstpunten. Deze vorm van zelfwerkzaamheid vereist van het leer- of werkboek een korte, duidelijke instructie, die meestal vragenderwijs zal zijn gesteld. Geeft het werkboek een min of meer uitputtende instructie met een aantal uitgewerkte voorbeelden, dan blijft voor de leerlingen alleen nog het nadoen over. Dit is dan het leren door voorbeelden, wat misschien wel leidt tot een leren met inzicht, maar niet tot een leren, waaruit inzicht volgt. Genoemde voorbeelden als toepassing van oplosschema's leiden tot een zekere verstarring, waarbij de eigen denk- en verwerkingswijze van de leerling niet altijd aansluit.
Zo zijn er bij mij altijd een aantal leerlingen, die bij het hoofdstuk merkwaardige producten $(a+b)^2$ blijven zien als $(a+b)(a+b)$ en dat dan gewoon als vermenigvuldiging uitrekenen. Zij hebben nog geen behoefte aan de merkwaardige uitkomst. Pas bij het ontbinden gaan zij het belang ervan inzien, terwijl dat nog duidelijker wordt, als men aansluitend een tweedegraadsvergelijking als $x^2+4x = 5$ gaat oplossen door afsplitsing van een kwadraat. Laat men echter het antwoord van $(a+b)^2$ inoefenen als een oplosschema $(a)^2+2(a)(b)+(b)^2$, dan stuit men soms op het antwoord $a^2+2a+2b+b^2$, omdat de leerling hier de distributieve eigenschap meent te herkennen. Daarnaast ziet men dan b.v. de fout, dat a^2+b^2 vereenzelvigd wordt met $(a+b)^2$. Er gaat zich dus een automatisme vormen, voordat het inzichtelijk leerproces zijn kans heeft gehad. Het systeem, waarin gewerkt wordt, wordt een gesloten systeem, terwijl het juist open moet blijven, om de scheiding met andere systemen te verminderen.

Men kan nu opmerken, dat de leerling na het verwerken van een hoofdstuk en zelfs na het maken van de test misschien nog niet in staat is een vraagstukje

zelfstandig te maken. Dit behoort tot de mogelijkheden maar ik acht dit geen enkel bezwaar mits de werkwijze zo is ingericht, dat het probleem zich op hoger niveau weer aandient en liefst enkele malen. Meestal zal het zich dan in een andere context voordoen en wanneer het toen verworven schema inderdaad inzichtelijk is verworven zal een z.g. infusie, een kleine aanwijzing dit schema weer actueel maken.
Ik meen, dat deze werkwijze veel effectiever is dan die, waarbij door veel oefening directe beheersing wordt vereist. Dit is ook in overeenstemming met de denkbeelden van Van Parreren over het integrerend leren. Hij constateert immers: 'door bekendheid of door eventueel vaag bekend voorkomen kan een gegeven in het totale leermateriaal een extra accent krijgen . . .' en verderop in zijn Psychologie van het Leren: 'In gevallen waarin inderdaad een dergelijk volledig integratief-verwerkend leren wordt beoogd, zal ervoor gezorgd moeten worden, dat het aanvankelijk zich vormende leersysteem niet een te sterk systeem wordt. In plaats van een geïntegreerd leerresultaat is dan eerder een gescheiden systeem het resultaat. Het leersysteem moet dus al spoedig open worden gemaakt, door de kern ervan, de hoofdzaken of het principe, te doen ervaren in verbinding met allerlei bij verschillende systemen behorende situaties of tot die systemen behorend materiaal . . . Wat is echter veelal de reactie van de leerkracht indien leerlingen onvoldoende gebruik maken van het geleerde? Men veronderstelt een onvoldoende inprenting . . . en gaat het geheel, de lesstof in kwestie nog eens opfrissen, er extra goed inzetten . . . Het resultaat . . . is averechts: hierdoor eerst recht wordt de spontane toepassing die door sterke systeemgrenzen belemmerd wordt, onmogelijk. Inplaats van herhaling, inoefening, actualisering binnen het systeem is actualisering buiten het systeem, met de daardoor vergrote kans op integratie, de juiste weg.'

Het leek mij nodig, hierbij wat langer stil te staan, omdat het zelfstandig werken, zoals beschreven pas goed tot zijn recht komt wanneer met bovengenoemde leerpsychologische factoren rekening wordt gehouden.
Bij dit systeem zal de oefenstof beperkt blijven omdat van de leerlingen immers niet een directe reproductie geëist wordt van het geleerde. Bovendien hebben de meeste leerlingen meer tijd nodig voor zelfstandige verwerking, dan wanneer de docent hieraan klassikaal leiding geeft. Zo zal een leerling aan het eind van het brugjaar wel kennis hebben gemaakt met de vergelijkingen, maar dit zijn dan niet alleen eerstegraadsvergelijkingen, maar ook allerlei zonder kunstgrepen oplosbare hogeregraads. Het systeem is dus niet beperkt gebleven tot het feilloos oplossen van eerstegraadsvergelijkingen, maar behelst het met inzicht oplossen van vergelijkingen. Het oplossen van lineaire vergelijkingen verloopt dus zeker niet feilloos en komt dan ook het tweede jaar weer aan de orde op een hoger niveau, b.v. in verband met de grafiek en de ongelijkheid. Eist men nu bij het oplossen van ongelijkheden een automatisme t.a.v. de vergelijkingen, dan is deze eis niet in overeenstemming met de doelstelling, die het verwerven van inzicht eist door middel van open systemen.

Dit alles kan zijn weerslag hebben bij b.v. het oplossen van vraagstukken bij de natuurkunde. Deze docent constateert dan, dat de leerlingen niet eens in staat zijn een eenvoudige vergelijking op te lossen. Terecht is dan ook het streven van de Moderniseringscommissie Natuurkunde, om het eerste jaar natuurkunde zoveel mogelijk practisch te laten verlopen en slechts zeer summier gebruik te maken van de wiskunde. Dit sluit niet uit, dat het mogelijk is in een speciaal uur door natuurkunde- en wiskundedocent gezamenlijk een zekere techniek op het gebied van de rekenvaardigheid bij te brengen, die zijn nut kan hebben zowel voor de natuurkunde als voor de wiskunde.
Een ander gevolg van de gevolgde methode is, dat de leerlingen uit de hogere klassen steevast beweren, dat zij in de onderbouw niets geleerd hebben. En daarom moeten zij nu zo hard werken. Aangezien echter het eerste jaar zeker en de daarop volgende jaren vaak ook spanningsloos zijn verlopen, hebben zij geen herinnering meer aan de toen verzette arbeid. Zij associëren dit met 'niets gedaan hebben'. Hadden zij werkelijk niets geleerd, dan zouden zij toch het voorgeschreven programma in de hogere klassen niet hebben kunnen afmaken.
Een nadeel voor de docent kan zijn de sterke binding met het gebruikte wiskundeboek. Hij kan vrijwel niet afwijken van de daarin gegeven voor stelling van zaken, aangezien de leerlingen zich volledig op die leerstof moeten oriënteren. Bij een gewoon leerboek gaat het immers meestal zo, dat de docent de uitleg geeft op zijn eigen manier, min of meer aansluitend bij het leerboek en slechts de sommetjes uit het boek gebruikt als oefenmateriaal.
Wanneer men echter docent is aan een Montessorischool, dan stelt men zich van te voren achter de aldaar gevolgde principes, althans in grote lijnen. Daarnaast zal men dan een didaktiek en een methodiek moeten ontwikkelen die in dit raam passen. Men zet zich dus op andere wijze in dan op een klassikale school en men erkent een andere volgorde van waarden, welke verband houdt met de persoonlijkheid van de leerling en waarbij andere leerpsychologische en didaktische inzichten op de voorgrond komen.

Boekbespreking

C. J. Alders, K. H. Cohen, J. R. F. van Duynen, L. Wijnolts, *Wiskunde voor H.A.V.O. 2H*, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen 1969, 67 blz., f 6,75

Na een korte herhaling van de inleiding van verzamelingen uit de brugklas volgen de breuken, vergelijkingen met een onbekende niet van de eerste graad. Na invoering van irrationale getallen volgen de wortels en irrationale vergelijkingen.
Relaties en grafieken worden begeleid door stelsels vergelijkingen en ongelijkheden. Deze hoofdstukken worden afgewisseld met hoofdstukken over puntverzamelingen, de stellingen over de rechthoekige driehoek en kubus.
Men vindt vele opgaven uit 'De oude Alders' terug. De notaties zijn gemoderniseerd, de technische vaardigheid met algebraïsche bewerkingen is niet verwaarloosd.

Burgers

Aan welke didaktische principes behoort ons onderwijs van elke dag te voldoen en welke invloed heeft dat op de methode?*

P. M. VAN HIELE

Voorburg

1 Een jaar of vijftien, twintig geleden stonden de didaktische principes die in het wiskunde-onderwijs zouden moeten gelden zeer sterk in de belangstelling. Langzamerhand raakten wij daar zelfs enigszins over uitgepraat en bovendien had zich een zekere communis opinio gevormd. Dat ik nu toch weer dit onderwerp uit de vergetelheid opdiep, komt, omdat ik mij ongerust maak, of door de modernisering van het wiskunde-onderwijs de didaktische principes niet te veel uit het oog worden verloren.

2 Onder didaktische principes zal ik verstaan alle algemeen geldende regels die het onderwijs betreffen en die, wanneer zij worden toegepast, tot betere onderwijsresultaten moeten leiden. Uit deze – niet al te streng te nemen – definitie blijkt, dat sommige didaktische principes ook tot karakterverbetering kunnen leiden en dus ook in engere zin pedagogisch zijn, aan de andere kant kunnen niet alle pedagogische principes didaktisch genoemd worden.

3 Kohnstamm heeft er eens op gewezen, dat het intelligentieniveau aan de leerling een zeker plafond stelt voor wat zijn intellektuele prestaties betreft, maar dat de werkelijke prestaties in vele gevallen beduidend lager liggen. Ik zou als eerste didaktische principe willen stellen, dat de docent moet trachten bij iedere leerling het aktuele niveau zo ver op te vijzelen, dat dit zo dicht mogelijk bij het potentiële komt te liggen. Het is mij gebleken, dat dit niveauverschil onvoorstelbaar groot kan zijn en het is voor de docent een uiterst dankbare taak om per week tenminste één leerling tot gedeeltelijke bewustwording van de in hem sluimerende mogelijkheden te brengen.

4 Dit punt zou een belangrijke betekenis bij de determinatie in de brugklas kunnen hebben. Bij deze determinatie is het niet zozeer van belang, wat het aktuele niveau van de leerling in de brugklas is, maar waar dit niveau in de volgende klassen zou kunnen liggen. Ook voor de leermethode heeft dit punt betekenis: er zal afwisselend leerstof moeten worden aangeboden van eenvoudige aard om het minimumprogramma te kunnen afwerken, er zal ook meer pittige

* Voordracht gehouden voor de Wiskunde Werkgroep van de W.V.O. op 13 november 1968.

leerstof in moeten voor komen, om de leerlingen tot een hoger niveau te stimuleren.

5 Een volgend didaktisch principe is, dat alle aangeboden leerstof doelmatig moet zijn. We behandelen problemen niet, omdat deze behandeling door voorafgaande leerstof toevallig mogelijk is geworden, neen, we behandelen leerstof alleen, wanneer we weten, dat we deze later zelf in ons onderwijs weer zullen nodig hebben, of omdat het een onderdeel uitmaakt van de totaal te verwerven kennis en kundigheden van het gegeven schooltype. Dit houdt dus ook in, dat de docent zich bij alles wat hij behandelt bewust moet zijn, welk leerdoel hij daarmee beoogt. Deze eis geldt uiteraard in de eerste plaats voor auteurs van schoolboeken, zij geldt echter ook voor de docenten die deze boeken gebruiken. Het is zeer te betreuren dat door de snelle invoering van nieuwe programma's nu zo weinig aan deze eis voldaan wordt.

6 Nieuwe leerstof behoort zoveel mogelijk aansluiting te hebben bij het bekende. Dit is de reden, waarom men liever met het bijzondere zal beginnen dan met het algemene. Beter dan met punten, lijnen en vlakken begint men met een kubus, omdat dit veelvlak aan de leerlingen bekend is. Het is beter te beginnen met bekende funkties, zoals $x \to x+4$ dan met verzamelingen van geordende getallenparen.

7 De leerstof behoort geheel behandeld te worden in de kontekst, waar zij thuis hoort. Verzamelingen zijn wiskundige objekten, waartussen betrekkingen bestaan die alleen in de wiskundige kontekst onverkort gelden. Wij moeten rekenen op begripsverduistering, wanneer wij bij onze start met dit onderwerp te lang blijven stilstaan bij verzamelingen van niet-wiskundige elementen. Dit wil niet zeggen, dat wij geen oog moeten hebben voor de toepassingen van de wiskunde. Men heeft dan echter een geheel nieuwe situatie: de wiskunde is dan reeds ontwikkeld en zij wordt dan gebruikt om een reële gegeven struktuur te benaderen. Mijn voorbeeld van de verzamelingen koos ik, omdat vrijwel iedereen daar op het moment mee gekonfronteerd wordt. Als men er op gaat letten, zal men afwijkingen van de juiste kontekst heel dikwijls ontmoeten, ook geheel binnen de wiskunde.

8 Terwille van de overzichtelijkheid van de totale leerstof en ook terwille van de samenhang, zal men graag een onderwerp, wanneer dit eenmaal aangesneden is, geheel willen uitputten. Van didaktisch standpunt is deze handelwijze verwerpelijk. Men verwerft het meesterschap over een onderwerp veel beter, wanneer men dit onderwerp vele malen en in telkens meer verdiepte vorm ontmoet, dan wanneer men slechts eenmaal de kans krijgt het eindpunt te bereiken.

9 We zagen, dat we alleen die leerstof uitzoeken die doelmatig is. Het rendement zal belangrijk toenemen, als ook de leerling zo snel mogelijk de bedoeling van het geleerde ervaart. De uitwerking van $(a+b)^2$ en de ontbinding van a^2-b^2 krijgen voor de leerlingen inhoud, indien deze leerstof direkt geïnte-

greerd wordt met het oplossen van vergelijkingen van de tweede graad. Voor de auteurs van leermetoden houdt dit een belangrijke opdracht in: de volgorde van de te behandelen onderwerpen hangt ten nauwste samen met de onderlinge samenhang van deze onderwerpen. Ik zou in dit opzicht heel ver willen gaan. Zodra de mogelijkheid is besproken om getallen te schrijven als machten van tien, zou ik de leerlingen praktische oefeningen met logaritmische berekeningen willen geven en dit nog vóór de teorie der oneigenlijke machten is behandeld en de definitie van ${}^{a}\log b$ is gegeven.

10 Het wiskundig geweten van de docent dient ondergeschikt te zijn aan zijn pedagogisch didaktisch geweten. Het gaat niet aan de leerlingen voor hen ongeschikte leerstof voor te zetten met het argument, dat het wiskundige geweten van de docent eist, dat alles bewezen dient te worden. Ook is het beter in de leerboeken zulke leerstof niet op te nemen. Thans treft men dit nog tamelijk veel aan. De auteur is zich ervan bewust dat de leerstof te moeilijk is en slaat die stukken daarom over. Maar hij heeft zich dan in ieder geval gewapend tegen de recensent die meestal ook lijdt aan een overgevoelig wiskundig geweten. De argeloze gebruiker van het boek die meestal van dergelijke overwegingen niet op de hoogte is, is dan het kind van de rekening.

11 De leerstof moet zoveel mogelijk gefocusseerd zijn, d.w.z. moet worden gegeven in eenheden die duidelijk op een bepaald doel gericht zijn. Men heeft dan een maximale kans dat dat doel ook werkelijk bereikt wordt. Wanneer men de leerstof analyseert, zal men bemerken dat zowel het aantal te kennen eenheden als het aantal vaardigheden waarover de leerling moet beschikken, vrij beperkt is. Met dit beperkte aantal goed bestudeerde en goed beheerste eenheden zal de leerling zich beter weten te redden dan met een uitgebreid veld van kennis, waarvan hij de struktuur toch niet goed doorziet.

12 Bij het samenstellen van de proefwerken houde de docent het oog gericht op de onderwerpen die in volgende hoofdstukken aan de orde zullen komen. De kennis die dáárvoor noodzakelijk is moet worden getoetst. Niet gevraagd behoeven te worden: 1° de inleidende leerstof die tot de probleemstelling leidde, 2° de leuke bijkomstigheden die men heeft toegevoegd om de leerstof aantrekkelijker te maken.

13 Ik herhaal nog eens kort de punten die ik heb behandeld:

a de docent moet de leerling attent maken op de in hem sluimerende mogelijkheden,
b de docent moet er van op de hoogte zijn met welk doel hij de leerstof, waar hij mee bezig is, behandelt,
c men zal dikwijls beter met het bijzondere kunnen beginnen dan met het algemene,
d leerstof dient steeds te worden behandeld in de kontekst, waar zij thuis hoort,

e men kan beter een onderwerp vele malen en steeds meer verdiept behandelen dan in één keer geheel uitputten,
f het nuttig effekt van de leerstof wordt groter, wanneer men de onderwerpen pas behandelt, op het moment dat men deze voor het vervolg nodig heeft,
g het wiskundige geweten van de docent dient ondergeschikt te zijn aan de belangen van de leerlingen,
h de leerstof dient zo gefocusseerd te zijn, dat het voor de leerlingen volkomen duidelijk is op welk doel er gemikt wordt,
i in de proefwerken vraagt men naar die zaken, waarvan het zeker is, dat de leerling voor zijn verdere studie de kennis daarvan niet missen kan.

14 Ik beweer niet dat deze opsomming volledig is, zelfs niet dat ik de voornaamste punten genoemd heb. Maar wel meen ik, dat de punten die ik behandeld heb de moeite waard zijn. En ik ben er zeker van dat het onderwijs verbeterd kan worden, wanneer men ook met deze punten rekening houdt. Hetgeen de bedoeling is van deze inleiding.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Verslag van de bestuursvergadering op 3 mei 1969 te Schijndel.

i Het bestuur is uitgebreid met het nieuwe lid R. den Otter (Utrecht) die de mavo-scholen vertegenwoordigt.

ii Voorzitter en secretaris hebben een verzoek om koninklijke goedkeuring van de vereniging ingediend.

iii Er zal een commissie worden gevormd om modellen van vwo-examens wiskunde I en wiskunde II te ontwerpen.

iv Een ledenwerfactie onder mavo-leraren heeft ca. 400 nieuwe leden opgeleverd.

v Op zaterdag 13 september 1969 zal in Utrecht een ledenvergadering worden gehouden. Tijd van aanvang: 14.00 uur. Het ligt o.a. in de bedoeling om dan een sectiebestuur mavo/havo te kiezen.
Aankondiging van deze vergadering komt in Euclides en in de drie mavo-bladen. Convocaties aan de leden zullen medio augustus worden verzonden.

vi Van elke bestuursvergadering zal voortaan een verslag in Euclides worden gepubliceerd.

vii De volgende bestuursvergadering is op 30 augustus 1969 in Utrecht.

M. Kindt

Staatsexamen Gymnasium A en B 1968
Uit het examen verslag

Wiskunde

Tot haar leedwezen heeft de subcommissie voor de wiskunde moeten constateren, dat het gemiddelde van de dit jaar door de A-kandidaten behaalde cijfers aanmerkelijk lager ligt dan het voorgaande jaar. Bedroegen deze gemiddelden vorig jaar beide 6,0, dit jaar was dit 5,3 voor de algebra en 5,4 voor de meetkunde.
Dat aan de kennis van de kandidaten te veel ontbrak, kan bovendien blijken uit het feit, dat in meer dan 10 % van de gevallen van wiskunde-examen voor een A-kandidaat gewaardeerd moest worden met het predikaat 3,2 of 1.
Wederom waren verscheidene kandidaten niet op de hoogte van de examen-eisen. Het is niet overbodig, nogmaals in herinnering te brengen, dat een overzicht van deze eisen is gepubliceerd in het examenverslag van 1959. Nog steeds menen kandidaten zich bij de bestudering van de algebra te kunnen beperken tot de theorie van de vierkantsvergelijkingen en de kwadratische functies. Zulke kandidaten moesten dan het antwoord schuldig blijven op eenvoudige vragen over valse en identieke vergelijkingen, over afhankelijkheid en strijdigheid van twee vergelijkingen met twee onbekenden, over het oplossen van twee vergelijkingen met twee onbekenden waarvan er één van de tweede graad is, en dergelijke onderwerpen.
Bij al te velen blijkt bovendien een gebrek aan wiskundig inzicht nog gepaard te gaan met een zeer geringe technische vaardigheid in het oplossen van eenvoudige routinevraagstukken.
Wanneer een kandidaat, om één voorbeeld te noemen uit de vele, na lange aarzeling opmerkt, dat hij de vergelijking $2x = x+2$ meent te moeten oplossen door beide leden van de vergelijking door 2 te delen, geeft hij blijk van een onvoldoende voorbereiding op het examen.
Ook bij het onderdeel planimetrie traden ernstige leemten in de kennis van vele kandidaten aan de dag. Herhaaldelijk bij voorbeeld waren kandidaten niet bekend met de stelling, dat in een rechthoekige driehoek de zwaartelijn naar de schuine zijde gelijk is aan de helft van die zijde.
Er blijken bovendien nog steeds kandidaten te zijn, die tijdens het examen meedelen, niet te weten, dat ook de beginselen van de goniometrie tot de examen-eisen behoren. Enkelen onder dezen menen dit gemis min of meer te kunnen compenseren door het gebruik van allerlei formules en stellingen, die allengs zijn gaan behoren tot de 'Geschiedenis van de Wiskunde', maar waarvan de kennis bij het examen 'Planimetrie' als overbodig gekenschetst dient te worden en door de subcommissie niet op prijs wordt gesteld.
Een iets optimistischer geluid kan de subcommissie doen horen ten aanzien van

de door de B-kandidaten behaalde resultaten. Hier waren de gemiddelden voor de algebra 6,6 (vorig jaar 6,1), voor de stereometrie 6,7 (v.j. 6,0), en voor de goniometrie en de analytische meetkunde 6,2 (v.j. 5,8).
Helaas moet hierbij opgemerkt worden, dat enkele kandidaten, die voor het schriftelijk werk een voldoend of zelfs ruim voldoend cijfer hadden behaald bij het mondelinge gedeelte van het examen niet in staat waren daarmee overeenstemmende prestaties te leveren. Speciaal bij het onderdeel stereometrie bleek enige malen een vrij grote discrepantie te bestaan tussen de resultaten van het schriftelijke en het mondelinge gedeelte van het examen. Bij het onderdeel analytische meetkunde misten vele kandidaten de noodzakelijke vaardigheid in het oplossen van problemen over verzamelingen. Deze vaardigheid kan men zichzelf slechts verschaffen, als men bij de voorbereiding op het examen een voldoend aantal vraagstukken maakt. Wanneer men dit nalaat, blijkt de oplossing van vele vraagstukken vast te lopen ten gevolge van veel onnodig en overbodig rekenwerk.
Tot slot merkt de subcommissie op dat bij goniometrische functies en goniometrische vergelijkingen het gebruik van radialen om principiële redenen de voorkeur verdient boven het werken met graden.

Staatsexamen H.B.S. - 1968
Uit het examen verslag

Wiskunde

Schriftelijk

h.b.s.-A. Uit het schriftelijk examen is gebleken dat het functiebegrip bij ver weg de meeste kandidaten niet aanwezig was (opgave 2b).
De meetkunde-opgave, waarbij gebruik moest worden gemaakt van de goniometrische definities van sinus en tangens, leverde voor vele kandidaten onoverkomelijke moeilijkheden op.

Mondeling

Ook dit jaar heeft de sub-commissie weer moeten constateren, dat de sinusregel en cosinusregel door de kandidaten in het algemeen niet werden gekend. Werd naar de sinus- en cosinusregel geïnformeerd, dan kreeg men meestal de definitie van sinus of cosinus, al of niet goed, als antwoord. Oneigenlijke machten en de eigenschappen van de logaritmen werden slecht gekend. Speciaal log $a - \text{lng}\, b = \log a/b$ en de toepassing op eenvoudige vraagstukjes gaven veel moeilijkheden.

Schriftelijk

h.b.s.-B algebra. Over het geheel genomen is het schriftelijk examen dit jaar beter gemaakt dan vorige jaren.

Mondeling

Ook bij het mondeling examen blijkt er notitie te zijn genomen van de verslagen van de voorafgaande jaren. Toch verdient het aanbeveling meer aandacht te schenken aan de juiste formulering van begrippen en eigenschappen.

Schriftelijk en mondeling

Stereometrie

h.b.s.-B. Het is de subcommissie gebleken, dat vele kandidaten eenvoudige begrippen en situaties, zowel uit de planimetrie, als uit de stereometrie zelf, niet helder voor de geest staan. Daaronder bevinden zich zelfs de hoek tussen twee lijnen, de hoek tussen twee vlakken, de afstand tussen twee kruisende lijnen en dergelijke.
Verder wordt vaak vergeten, dat een parallelogram en een ruit vierhoeken zijn, die in één vlak moeten liggen. Aan de andere kant worden bij bewijzen, dat iets een parallelogram of ruit is, soms alle kenmerken opgesomd, waar één voldoende was.
Bij onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken in de ruimte worden naast de algemene situatie de bijzondere gevallen meestal vergeten, of zelfs dooreengehaspeld. Soms ziet men de kandidaat op deze wijze zelf gegevens verzinnen. Zo vergeten velen, dat twee lijnen in het algemeen kruisende lijnen zijn: dat twee loodrecht op elkaar staande lijnen, dus in het algemeen elkaar niet snijden; dat een bol bepaald is door vier punten, die niet in één vlak liggen. Opvallend weinig kandidaten kennen de kenmerken van de loodrechte stand van twee vlakken en van twee evenwijdige vlakken.
Bekend is ook, dat als alle kandidaten het begrip hoek tussen lijn en vlak duidelijk was geweest, het eerste vraagstuk van het schriftelijk deel van het examen beter zou zijn gemaakt.
Tot slot blijken vele kandidaten weinig vaardig te zijn in eenvoudige constructies van netwerken, van enige projectie-meetkunde, van het bepalen van snijpunten van lijn en kegelvlak of bolvlak en van raakvlakken aan kegel en bol.

Goniometrie en Analytische Meetkunde

h.b.s.-B Algemeen.

1 Men kan pas de oplossing van een vraagstuk met vrucht ter hand nemen, indien men zich tevoren het probleem goed voor ogen heeft gesteld en een bepaalde oplossingsmethode ontworpen. Zowel bij het schriftelijk als bij het mondeling examen blijkt, dat vele kandidaten menen, met behulp van een aan-

tal gememoriseerde formules en veel ijverig gereken, een opgave wel de baas te kunnen worden. De subcommissie wijst er met nadruk op, dat zulke kandidaten slechts dan succes zullen kunnen boeken, indien zij met deze 'methode' volledig breken.

2 Wanneer men tijdens de oplossing verzandt in een berekening, moet men onmiddellijk ophouden, zich op de gevolgde methode bezinnen en eventuele rekenfouten opsporen. Vaak gaat men ten koste van alles door met zinloos gereken, waardoor kostbare tijd verloren gaat.

Goniometrie

1 Hoewel de subcommissie het gebruik van radialen toejuicht, maakt zij hoegenaamd geen bezwaar tegen het gebruik van graden. Wel staat zij er op, dat men óf het één, óf het ander doet!

2 Bij het oplossen van vergelijkingen dient men bewust te streven naar de herleiding tot een van de bekende grondvormen.

3 Men dient zich te realiseren, dat niet van alle goniometrische functies de grafiek de sinusoïde is!

Analytische Meetkunde

1 Het maken van een duidelijke en min of meer op schaal getekende figuur kan niet genoeg worden aangeraden.

2 Indien men slordig is, moet men afzien van de notatie x', x_1 en dergelijke!

3 Dikwijls wordt, indien naar de vergelijking van een kegelsnede wordt gevraagd de (volgens de kandidaten) normale vorm gegeven. Zij snijden zich in vele gevallen daarmede de weg tot een juiste oplossing af.

4 Het is de subcommissie opgevallen, dat het begrip afhankelijkheid van twee vergelijkingen met twee onbekenden niet goed werd beheerst. Het is van belang, omdat vaak de vergelijking van een rechte op twee manieren kan worden gevonden. De afhankelijkheid van de gevonden vergelijkingen is dan meestal de sleutel van de oplossing van het probleem.

Slot

De subcommissie vleit zich met de hoop, dat de a.s. staatsexamenkandidaten haar opmerkingen en die vàn haar voorgangsters ter harte zullen nemen.
Het is jammer, dat vele kandidaten (voornamelijk zij, die geen geregelde opleiding hebben genoten) minder presteren, dan zij in feite zouden kunnen doen.

Wiskobas

Onder auspiciën van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde wordt een project ontwikkeld dat de naam WISKOBAS heeft gekregen. Het is de bedoeling van de redactie van EUCLIDES u regelmatig op de hoogte te houden van de vorderingen van dit project.
In vele landen binnen en buiten Europa (Engeland, Frankrijk, België, Duitsland, Zweden, Australië, Canada, enz.) is het wiskunde-onderwijs op de basisschool soms al vele jaren in onderzoek.
Dit heeft mede geresulteerd in het verschijnen van diverse series schoolboeken. Deze methoden zijn dikwijls op geheel verschillende inzichten van de auteurs gebaseerd t.a.v. de doelstelling van het wiskunde-onderwijs in de basisschool. Het is begrijpelijk dat in Nederland, vooral ook van uitgeverszijde, een grote belangstelling voor deze buitenlandse methodes bestaat. Dit te meer, daar in een gemoderniseerd wiskunde-onderwijs in de basisschool in Nederland geen enkele bestaande rekenmethode meer bruikbaar zal blijken.
Gelukkig hebben de uitgevers bij hun onderzoek een groot verantwoordelijkheidsgevoel t.a.v. het Nederlandse onderwijs aan de dag gelegd en zijn ze zeer voorzichtig te werk gegaan. Momenteel wordt een uit het Frans vertaalde methode op beperkte schaal in een experiment geprobeerd. De onderwijzers die deze methode gebruiken krijgen schriftelijke begeleiding. Voorts staan te verschijnen een vertaling van een Amerikaanse methode en een bewerking van een Duitse methode.
Het zal duidelijk zijn dat in het licht van deze ontwikkelingen een herscholing van onderwijzers in het moderne wiskunde-onderwijs op de basisschool hoogst urgent is.
In mei 1967 werd door de heren dr. W. Brandenburg, F. Goffree en drs. E. J. Wijdeveld een rapport aangeboden aan de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde inzake het leervak rekenen in het basisonderwijs.
De genoemde werkgroep, later uitgebreid met drs. B. v. d. Krogt hield zich reeds geruime tijd bezig met het onderzoek naar het moderne wiskunde-onderwijs in de basisschool. Mede naar aanleiding van hun rapport heeft de C.M.L.W. een subcommissie 'Basisonderwijs' ingesteld, waarin de werkgroep is opgenomen.
Op 16 september 1968 werd ten kantore van de Inspecteur-Generaal, de heer dr. A. de Jong een bijeenkomst belegd, waarbij onder meer vertegenwoordigers van de C.M.L.W., de kweekschoolbonden, de kweekschoolinspectie en de pedagogische centra aanwezig waren. Op deze bijeenkomst kon drs. E. J. Wijdeveld het bovengenoemde rapport toelichten. Naast het rapport werd een tienjarenplan voorgelegd waarin de medewerkers van de C.M.L.W. een planning voorstellen van de aktiviteiten in verband met de modernisering van het wiskunde-onderwijs op basis- en opleidingsscholen. Als participanten worden genoemd de Pedagogische Instituten, Schooladviesdiensten, Pedagogische

Centra, Inspecties van lager- en kweekschoolonderwijs en in het bijzonder de kweekscholen.
De groep van kweekschoolleraren (wiskunde en pedagogiek) zal in dit onderwijsverbeteringsproject een centrale plaats innemen.
Een officiële start zal het project krijgen tijdens een zogenaamde cursusconferentie die van 13–18 oktober 1969 in Egmond in het Troelstraoord wordt gehouden. Deze conferentie wordt voorbereid door een dertigtal kweekschoolleraren, die gezamenlijk de besturen vormen van vijftien werkgroepen, over geheel Nederland verspreid.
Overwogen wordt in september te starten met cursussen voor onderwijzers. Daarvoor zou elke werkgroep dienen te beschikken over een wiskunde-werklokaal. Verder wordt nagegaan in hoeverre de Nederlandse Onderwijs Televisie de cursussen zou kunnen ondersteunen.

Kr.

Nico

Op veler verzoek vermeld ik, dat het Belgische tijdschrift Nico (waarvan het eerste nummer besproken is in Euclides, **44**, VI, blz. 186) uitgegeven wordt door het Belgisch Centrum voor Metodiek van de Wiskunde, Brugmannlaan 183, Brussel 6. De abonnementsprijs bedraagt 4$, te storten op girorekening 302.10 van het B.C.M.W.
Inmiddels is het tweede nummer verschenen. Het is dikker dan het eerste (128 blz.) en bevat verschillende belangrijke artikelen. Het begint met een magistraal geschreven artikel van Dieudonné, waarin deze op heldere wijze uiteenzet in hoeverre het wiskundig rekenen tegenwoordig een belangrijke rol speelt. Dit onderwerp is voor ieder, die de inhoud van een modern programma poogt te beoordelen, van groot belang.
Papy geeft een inleiding in de beschrijvende statistiek met gebruikmaking van de hulpmiddelen van de vectoralgebra. Merkwaardig is de natuurlijke wijze, waarop hij de standaardafwijking definieert.
Dan volgt een op speelse wijze geschreven bijdrage van Holvoet over groepen. Glaymann (Lyon) beschrijft een op een basisschool te Franche-ville-le-Haut genomen experiment, dat als doel had reeds vroegtijdig leerlingen inzicht in structuren bij te brengen. Ook Frédérique schrijft over haar ervaringen opgedaan bij experimenten op de basisschool. Zij maakt gebruik van graffen bij het aanleren van de rekenoperaties. Dit zijn de belangrijkste bijdragen uit deze aflevering. Als de redactie kans ziet op deze wijze het tijdschrift te blijven verzorgen, kan ik ieder een abonnement van harte aanbevelen.

P. G. J. Vredenduin

Onderwijs en verandering

In brede kringen heerst in Nederland onbehagen over de langzame en onvolledige vernieuwing van ons onderwijs. Veranderingen komen maar moeizaam tot stand en zijn bij lange na niet algemeen. Dergelijke veranderingen zijn dringend nodig, wil het onderwijs de op de samenleving voorbereidende taak kunnen blijven vervullen. Onze dynamische maatschappij vraagt om soepele creatieve mensen, die op moderne wijze zijn geschoold, van kleuterwereld tot universiteit. Achterstand in het onderwijs betekent op den duur onverbiddelijk ook maatschappelijke achteruitgang.

De Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs (W.V.O.) maakt zich samen met vele anderen om de ontwikkeling van ons onderwijs zorgen. Zij heeft daarom het initiatief genomen tot een conferentie over 'Onderwijs en verandering', die van 23–25 oktober a.s. in het Evert Kupersoord te Amersfoort zal worden gehouden.
In deze conferentie zal getracht worden te komen tot de ontwikkeling van een strategie van de vernieuwing van het onderwijs in Nederland.

Het ligt in de bedoeling om bij de voorbereiding van de conferentie uit te gaan van zg. 'Modellen' voor het tot stand brengen van verandering in het onderwijs, zoals die de laatste jaren in binnen- en buitenland zijn ontwikkeld. Allen die op enigerlei manier bij het onderwijs zijn betrokken, worden in staat gesteld tijdens de voorbereiding van deze 'modellen' kennis te nemen.
Commissies van deskundigen zullen pre-adviezen aan de conferentie uitbrengen, evenals drie deskundigen uit binnen- en buitenland.
De conferentie wordt voorbereid door de W.V.O. samen met topfunctionarissen van het Departement van Onderwijs en Wetenschappen, van de Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs, Universitaire Research Instituten, Pedagogische Centra, Leden van de Tweede Kamer, ouders, leerlingen en uitgevers van schoolboeken.

De conferentie zal worden geleid door Prof. Dr. L. van Gelder, hoogleraar schoolpedagogiek en onderwijskunde aan de Rijksuniversiteit te Groningen en voorzitter van de W.V.O.

De conferentie zal de stoot moeten geven tot een planmatige vernieuwing in alle geledingen van het Nederlandse onderwijs.

Liwenagel

Ledenvergadering op vrijdag 3 oktober 1969 om 14.00 uur in het Evert Kupersoord, Stichtse Rotonde, Amersfoort.

Agenda:

1 Opening.
2 Notulen (hieronder afgedrukt).
3 Verslag kascommissie.
4 Bestuursverkiezing. (Dr. J. C. van der Steen treedt af en stelt zich niet herkiesbaar. Bestuurskandidaat is Drs. Th. H. ten Berge. Tegenkandidaten kunnen vóór 27 september a.s. worden opgegeven bij de secretaris.)
5 Causerie door de heer Drs. H. A. van Wely (Mol, België) over: "*Het onderwijs op Amerikaanse en Europese scholen, een vergelijking.*"
6 Rondvraag.
7 Sluiting.

D. Leujes, secretaris.
Thorbeckestraat 47, Delft.

Notulen van de ledenvergadering op dinsdag 22 oktober 1968 in het Evert Kupersoord te Amersfoort

Om 14.00 uur opende de voorzitter, Drs. M. Koksma, de vergadering. In het bijzonder heette hij welkom: Dr. F. Balkema, inspecteur van het vwo/havo, Drs. W. J. de Vos en Drs. H. C. Vernout, vertegenwoordigers van resp. Velines en de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.
De notulen van de vorige vergadering werden ongewijzigd goedgekeurd. De penning- meester werd op voorstel van de kascommissie gedechargeerd. Dr. C. P. Koene werd als bestuurslid herkozen.
De hoofdschotel van deze vergadering was de causerie van Ir. S. H. Wijnnobel over het onderwerp: '*Hoe zoudt u een modern leerplan natuurkunde samenstellen*?'
Spreker is vertegenwoordiger van Liwenagel in de Commissie Modernisering Leerplan Natuurkunde. Deze commissie is op 3 mei 1965 geïnstalleerd. Er zijn ongeveer 20 leden: een tiental hoogleraren en verder enkele inspecteurs, rectoren, conrectoren en leraren. De commissie vergadert ca. 15 keer per jaar. Een aantal onderzoekingen is op gang gebracht, enige cursussen zijn georganiseerd. (Zie ook 'Faraday', lopende jaargang, blz. 170–171.) Spreker mag niet 'uit de commissie klappen' en heeft daarom de titel van zijn causerie in vragende vorm gesteld. Het lukt hem inderdaad de vergadering aan het praten te krijgen, zij het over detailproblemen.
Na een geanimeerde discussie sloot de voorzitter om 15.30 uur de vergadering onder dankzegging aan de spreker voor de moeite die hij zich getroost had en aan de aanwezigen voor hun belangstelling.

D. Leujes,
secretaris.

Boekbespreking

Prof. Dr. H. Freudenthal, *Educational studies in mathematics*; Vol I, No. 1/2; 1968; 246 blz.; D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

De uitgave van dit nieuwe internationale tijdschrift is een gebeuren van grote betekenis op het gebied van de didactiek van de wiskunde, dit begrip dan genomen in zo ruim mogelijke betekenis. Freudenthal heeft zich de medewerking van een uitgebreide staf van deskundigen weten te verzekeren. De lijst van leden van de Editorial Board telt 18 namen. Deze houden een garantie in voor de veelzijdigheid en het vakmanschap van de bijdragen die in de opvolgende nummers van het tijdschrift een plaats zullen vinden.
Educational studies in mathematics wordt niet uitgegeven als officieel orgaan van enige organisatie; Freudenthal is editor, tout court, Reidel de uitgever. Dat Freudenthal deze taak op zich heeft willen nemen zal niemand verwonderen die op de hoogte is van de op de voorgrond tredende plaats door hem in de loop van bijna 20 jaar bij de diverse activiteiten van de C.I.E.M., de commission internationale de l'enseignement mathématique, ingenomen. Bovendien is hij sinds het jongste Internationale Mathematisch Congres (Moskou, 1966) voorzitter van de C.I.E.M. en daardoor betrokken bij de voortdurend in aantal en betekenis toenemende conferenties die van deze organisatie uitgaan. Hij was stellig de aangewezen man voor het totstandbrengen van een vaktijdschrift van deze allure.
De C.I.E.M. was en is weliswaar in het bezit van een officieel orgaan, *L'Enseignement Mathématique*, een in Zwitserland verschijnend tijdschrift waarin alle documenten op het verenigingsleven betrekking hebbend worden opgenomen en waarin men af en toe ook wel eens een verhandeling over een didactisch onderwerp aantreft. Maar dit tijdschrift bevat merendeels vakwetenschappelijke verhandelingen.
Het is dan ook verheugend, dat nu de onderwijswereld internationaal de beschikking krijgt over een tijdschrift dat uitsluitend gewijd zal zijn aan de didactische problematiek. In de huidige periode van snelle evolutie op het gebied van modernisering van het wiskundeonderwijs in alle landen ter wereld is er aan zo'n tijdschrift stellig behoefte.
Het dubbelnummer dat we ter recensie ontvingen bevat de verslagen van de inleidingen gehouden op het Colloquium van de C.I.E.M. dat van 21 tot 25 augustus 1967 in Utrecht werd gehouden. De conferentie was gewijd aan het thema *How to teach mathematics so as to be useful.* Het heeft geen zin om in deze aankondiging op de inhoud van de diverse voordrachten in te gaan, zelfs niet om een opsomming te geven van de titels van de diverse artikelen. We verwijzen ieder die het probleem van de relatie tussen voortgezet onderwijs en toepassingen van de wiskunde als een voor het onderwijs brandend probleem erkent naar het tijdschrift zelf. We volstaan met een vermelding van de namen van de sprekers op de conferentie; er zijn er verschillende onder die in de wereld van de Nederlandse wiskundeleraren reeds een goede klank hebben. Sprekers waren: uit België Servais, uit Polen mevrouw Krygowska, uit Rusland Sobolev, uit Frankrijk Revuz, Pisot, Tavernier, Glaymann, Roumanet, mad. Brailly, uit West-Duitsland Behnke, Steiner, Engel, uit de Verenigde Staten Young, Polak, Walker, Klamkin, uit Engeland Fletcher, Lyness, Griffith, Hammersley, uit Zwitserland Delessert, uit Zweden Håstad.
Achter in het dubbelnummer vinden we een opsomming van de punten van bespreking uit een in januari 1967 te Lausanne gehouden conferentie van de C.I.E.M. en de conclusies van dat congres, gewijd aan de coördinatie van de vakken wiskunde en natuurkunde op onze scholen.
De omstandigheid dat in 1969 opnieuw een regionale conferentie van de C.I.E.M. te Echternach zal plaats hebben, terwijl tevens in dat jaar te Lyon het eerste '*International Congress on Mathematical Education*' zal worden gehouden, wettigt de verwachting dat de editor van het nieuwe tijdschrift in afzienbare tijd nog niet om kopij verlegen zal zitten.

De uitgever Reidel heeft het tijdschrift royaal uitgegeven. Jammer dat de hoge prijs (80,— gld voor de eerste jaargang, 84,80 gld straks voor de tweede) tal van Nederlandse wiskundeleraren begrijpelijkerwijze van het nemen van een abonnement zal weerhouden.

Joh. H. Wansink

Computerwiskunde, onder redactie van Prof. dr. J. J. Seidel, Aula-serie, no. 407, Uitgeverij Het Spectrum N.V., Utrecht, 1969, 154 blz.

Dit boek is ontstaan als een heroriënteringscursus voor leraren in de wiskunde bij het middelbaar onderwijs, die in 1967–1968 onder auspiciën van de Commissie Modernisering Leerplan wiskunde werd uitgegeven.
De wijze van presentatie is ingesteld op een breed publiek van belangstellenden, al zal de voorkennis van slechts de wiskunde van de middelbare school wel wat ruim genomen moeten worden.
Het boek is verdeeld in vijf hoofdstukken, het vijfde hoofdstuk bestaat uit vraagstukken en oplossingen, terwijl ook de andere hoofdstukken versierd zijn met vragen en vraagstukken.
Prof. dr. A. van der Sluis schreef de eerste twee hoofdstukken, waarin de machinetaal wordt toegelicht met eenvoudige problemen en waarin numerieke toepassingen worden besproken.
Hoofdstuk III is van de hand van Prof. dr. N. G. de Bruijn, die niet-numerieke computertoepassingen bespreekt.
Prof. dr. E. W. Dijkstra behandelt in hoofdstuk IV de structuur van de rekenautomaten.

Burgers

Papy, *Le premier enseignement de l'analyse*, collection Frédérique 3, Presses Universitaires de Bruxelles, 1968, XIII+288 pp., avec la collaboration de Frédérique et Roger Holvoet.

In sommige hoofdstukken van dit boek wordt uiteengezet, op welke wijze men fundamentele topologische begrippen aan leerlingen duidelijk kan maken. Andere hoofdstukken hebben een meer wetenschappelijk karakter en dienen om de leraar zelf vertrouwd te maken met de topologie.
Didactisch karakter hebben de hoofdstukken 2 en 4. In hoofdstuk 2 (getiteld: topologie générale à 16 ans) vindt men eerst een fraaie methode om de betekenis van open verzamelingen, uitgaande van een afstandsdefinitie, duidelijk te maken. Daarna wordt het resultaat in twee etappes gegeneraliseerd. Eerst wordt het afstandsbegrip gegeneraliseerd en daarna ziet men, dat dit hele afstandsbegrip niet essentieel is voor de definitie van open verzamelingen. Zo ontstaat de abstracte definitie van een topologische ruimte.
Hoofdstuk 4 geeft een bijzonder mooie inleiding in de theorie van de continuïteit. Dit hoofdstuk is voor de Nederlandse leraren het belangrijkste van het boek. Wie het doorleest zal er stellig aardige suggesties uit overnemen.
De overige hoofdstukken zijn meer van wetenschappelijke aard. In het derde hoofdstuk vindt men een serie topologische begrippen en stellingen. De bewijzen moet men gelukkig zelf vinden.
In het resterende deel vindt men allerlei wetenswaardigs over Jordanse bogen (in verband met de grafiek van een continue functie), kromme van Peano, compacte ruimten, e.d.
Aan het eind is afgedrukt het nieuwe Belgische programma voor het middelbaar onderwijs, aan de hand waarvan men de directe betekenis van het boek voor dit onderwijs kan nagaan.

P. G. J. Vredenduin

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

222 Uit een olympiade in de D.D.R.: binnen vierkant *ABCD* ligt een vast punt *P*; punt *Q* doorloopt de omtrek en *R* is zo gelegen, dat driehoek *PQR* gelijkzijdig is. Wat is de verzameling van de punten *R*? Geen analytische meetkunde gebruiken; men kan de oplossing in twee regels opschrijven. (Uit Wiskunde Post.)

223 Een erfenis bestaat uit een aantal objecten ter waarde van $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ gulden, waarin $a_1 = 1$ en voor elke i geldt $a_i \leqq a_{i+1} \leqq 2a_i$ en a_i is natuurlijk een getal. Twee erfgenamen moeten deze voorwerpen zo verdelen, dat het verschil tussen de waarden van hun delen hoogstens 1 gulden bedraagt. Hoe moeten ze dit doen?

Oplossingen

220 Gevraagd werd, hoe superintelligente dwergen, wie elke morgen door hun koning verzocht werd een pas voorwaarts te doen, als ze blauw haar hadden, op zekere dag in staat waren aan dit verzoek te voldoen. Voor details zie het vorige nummer.
De eerste dag doet de koning het verzoek. Onderstel dwerg A kijkt rond en ziet, dat dwerg B blauw haar heeft. Hij redeneert nu als volgt. Onderstel, dat dwerg B ziet, dat niemand van de anderen blauw haar heeft, dan weet hij, dat hij zelf blauw haar heeft. Hij zal dan een stap voorwaarts doen. Dit gebeurt niet. En dus zijn er minstens twee dwergen, die blauw haar hebben. Wegens hun superintelligent zijn, trekken allen deze conclusie.
De tweede dag kijkt A weer rond. Hij ziet, dat B en C blauw haar hebben. Als dat de enigen zijn, ziet B maar één blauwharige dwerg. Hij weet, dat er minstens twee zijn. Dus weet hij, dat hij zelf blauw haar heeft en zal een stap voorwaarts doen. Dit gebeurt niet en zo weet A, dat er minstens drie blauwharigen zijn. En ook alle anderen weten dit.
Enzovoorts.
Onderstel er zijn 72 blauwharigen. De 72e dag zullen dan al deze blauwharigen weten, dat zij blauw haar hebben. Ze weten immers nu, dat er minstens 72 zijn en ze zien er elk maar 71. Dus doen ze een stap voorwaarts.

221 Twee maatstokken zijn elk door een deelstreep in 2 delen verdeeld (resp. a en b cm en c en d cm lang, a, b, c, d, geheel). Gevraagd a, b, c en d zo te kiezen dat alle lengten van 1 tot n cm kunnen worden afgelezen (n maximaal).
Het aantal lengten, dat afgelezen kan worden, is maximaal 24, namelijk 15 zonder en 9 met mintekens. Dus kan n maximaal 24 zijn. Dat dit aantal ook bereikt wordt, blijkt uit het voorbeeld $a = 1$, $b = 2$, $c = 7$, $d = 14$. (Men ziet nu ook, hoe men verder kan gaan. Op een derde stok zou men krijgen $e = 49$, $f = 98$, enz.)

Inhoud